

# Mechanica

**P.J. Mulders**

Afdeling Natuurkunde en Sterrenkunde, Faculteit der Exacte Wetenschappen,  
Vrije Universiteit Amsterdam  
De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam

email: [mulders@few.vu.nl](mailto:mulders@few.vu.nl)

September 2010 (vs 2.18)



Colleges gegeven in het studiejaar 2010-2011

## Voorwoord

Het college *Mechanica* (en *Mechanica voor scheikundigen*) wordt dit najaar verzorgd door Prof. Piet Mulders. Het werkcollege zal worden verzorgd door Anton Quelle, Jonas Voorzanger en Menno Pleijster (ouderejaars natuurkundestudenten). Het college volgt het boek *Physics for Scientists and Engineers* van D.C. Giancoli (Pearson, 2009). Hiervan bestaat ook een Nederlandstalige versie, maar ik raad de Engelstalige versie aan. Deze aantekeningen vormen een Nederlandstalige samenvatting van het college, soms gegeven vanuit een iets ander perspectief dan het boek. Deze samenvatting bevat slechts enkele figuren en nauwelijks voorbeelden. Dat is de sterkte van het boek. De met \* gemerkte onderdelen zijn uitbreidingen, die behoren tot de stof in periode 2.

Het gehele college *Mechanica* beslaat 6 studiepunten en wordt gegeven in periodes 1, 2. Er worden wekelijks 2 uur hoorcollege gegeven en 2 uur werkcollege. Het college *Mechanica voor scheikundigen* beslaat alleen periode 1 (3 studiepunten). Naast het college is er een werkcollege en moeten er opgaven worden ingeleverd, die worden beoordeeld. Dit vormt een essentieel onderdeel van de toetsing. Periode 1 en 2 worden elk afgesloten met een deeltentamen. In de eindbeoordeling zullen naast de resultaten voor deel- en eindtentamen ook de resultaten voor ingeleverde opgaven meetellen. Bovenstaande regeling geldt uitsluitend voor studenten die actief deelnemen aan colleges en werkcolleges.

Om problemen rond college en werkcollege in een vroeg stadium te signaleren zal er een college-responsgroep worden geformeerd.

Piet Mulders  
September 2010

### Opzet college

	boek	Dictaat
Week 36	1, 2	1, 2
Week 37	2, 3	2
Week 38	4, 5, (6)	3
Week 39	7, 8	4
Week 40	9	5 (zwaartepunt)
Week 41	10, 11	6 (rotaties)
Week 42	12, 13	7 (evenwicht, vloeistoffen)
Week 44	1 - 9	1 - 5
Week 45	10 - 13	5 - 7
Week 46	6	8
Week 47	36	9
Week 48	36	9
Week 49	14	10
Week 50	uitloop/ herhaling/ samenvatting	

# Contents

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>1</b>
1.1	Ruimte, tijd en grootheden . . . . .	1
1.2	Dynamica . . . . .	1
1.3	Eenheden . . . . .	1
1.4	Numeriek . . . . .	2
1.5	Domein van de klassieke mechanica . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Beweging in ruimte en tijd</b>	<b>3</b>
2.1	Beweging langs een lijn (één dimensie) . . . . .	3
2.2	Beweging in een vlak (twee dimensies) . . . . .	4
2.3	Banen bij een beweging . . . . .	5
2.4	Cirkelbeweging . . . . .	6
2.5	Beweging in de ruimte (drie dimensies) . . . . .	7
2.6	*Fundamentele symmetrieën . . . . .	7
2.7	*Speciale relativiteitstheorie en discrete symmetrieën . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Newtoniaanse mechanica en toepassingen</b>	<b>10</b>
3.1	De wetten van Newton . . . . .	10
3.2	Fundamentele krachten . . . . .	10
3.3	Afgeleide krachten . . . . .	11
3.4	Analyse met vrije lichaamsdiagram en rekenen met Newton . . . . .	12
3.5	Rekenen met Newton . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Arbeid en behoud van energie</b>	<b>14</b>
4.1	Arbeid . . . . .	14
4.2	Arbeid en energie . . . . .	15
4.3	Behoud van energie . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Behoud van impuls en rol van het zwaartepunt</b>	<b>18</b>
5.1	Stoot en behoud van impuls . . . . .	18
5.2	Botsingen in één dimensie . . . . .	18
5.3	Het zwaartepunt . . . . .	19
5.4	Relatieve en zwaartepuntscoördinaten . . . . .	20
5.5	*Botsingen in meer dimensies . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Rotaties en behoud van impulsmoment</b>	<b>23</b>
6.1	Kinetische energie van roterend systeem . . . . .	23
6.2	Krachtsmoment en behoud van impulsmoment . . . . .	24
6.3	*Rotatiesnelheid als vectorgrootheid en impulsmoment . . . . .	26
6.4	*Impulsmoment en quantummechanica . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Continue media</b>	<b>28</b>
7.1	Dichtheid . . . . .	28
7.2	Evenwicht . . . . .	28
7.3	Spanning in vaste stoffen . . . . .	29
7.4	Druk in vloeistoffen of gassen . . . . .	30
7.5	Vloeistoffen en gassen in beweging . . . . .	31
7.6	Viscositeit . . . . .	32

<b>8</b>	<b>Gravitatie</b>	<b>33</b>
8.1	Separatie van variabelen . . . . .	33
8.2	Gravitatiepotentiaal . . . . .	33
8.3	Cirkelbaan . . . . .	33
8.4	Banen in een gravitatieveld . . . . .	34
8.5	Gravitatieveld van massaverdeling . . . . .	36
<b>9</b>	<b>Speciale relativiteitstheorie</b>	<b>37</b>
9.1	Beweging in verschillende referentiesystemen . . . . .	37
9.2	Optellen van snelheden . . . . .	39
9.3	Relativistische energie en impuls . . . . .	39
9.4	Het Doppler effect voor licht . . . . .	40
<b>10</b>	<b>Trillingen</b>	<b>41</b>
10.1	De harmonische oscillator . . . . .	41
10.2	Energie van een harmonische trilling . . . . .	41
10.3	Gedempte trillingen . . . . .	42
10.4	Aangedreven trillingen . . . . .	43



# 1 Inleiding

## 1.1 Ruimte, tijd en grootheden

In dit college zullen we bewegingen van objecten bestuderen. Deze beweging vindt plaats in wat we de ruimte noemen. Dat kan langs een lijn in één dimensie zijn of in een vlak in 2 dimensies of in de 3-dimensionale ruimte. Bij beweging spelen de begrippen *plaats* (of *positie*) en *tijd*. Objecten (soms abstract als systemen aangeduid) hebben een aantal eigenschappen, die intrinsiek kunnen zijn zoals *massa* of samenhangen met beweging zoals *snelheid* en *versnelling*. Ze kunnen bestaan uit één object of uit meerdere objecten (samengesteld). Samenhangend met de beweging komen we grootheden *energie* en *impuls*<sup>1</sup> tegen. Bij beweging langs een gekromde baan, zoals in het meest symmetrische geval een cirkel, krijgen we te maken met eigenschappen als *hoeksnelheid* en *hoekversnelling*, alsmede de grootheid *impulsmoment*. Bij een periodieke beweging in de tijd komen we de *periode* of *trillingstijd* tegen. Een periodieke herhaling in de ruimte wordt gekenmerkt door een *golflengte*.

## 1.2 Dynamica

De met beweging samenhangende grootheden zoals energie en impuls veranderen onder invloed van *krachten*. Het is in essentie de samenhang tussen de verschillende grootheden in bepaalde situaties die we in dit college zullen proberen te doorgronden, allereerst conceptueel maar daarnaast willen we ook vertrouwd raken met de methodes om hier berekeningen te doen. De basisconcepten en grootheden die we in de natuurkunde van alledag nodig hebben, staan niet op zichzelf maar blijven ook geldig in de wereld van atomen en deeltjes waar de quantummechanica een rol gaat spelen of bij grote snelheden beschreven met de relativiteitstheorie. En wanneer we met enorme aantallen deeltjes werken zoals bij het bestuderen van vaste stoffen, vloeistoffen of gassen vertalen de grootheden zich op een natuurlijke manier in nieuwe concepten als *druk*, *temperatuur* en *entropie*.

## 1.3 Eenheden

Bij het quantificeren van de grootheden die we tegenkomen hebben we eenheden nodig, wat er op neerkomt dat we grootheden vergelijken met afgesproken vergelijkingsgrootheden, zoals bijvoorbeeld lengtes met een standaardlengte. Het blijkt dat we kunnen volstaan met drie eenheden, een lengte-eenheid (meter = m), een tijd-eenheid (seconde = s) en een massa-eenheid (kilogram = kg). Andere grootheden kunnen hierin uitgedrukt worden doordat we verbanden met tijden, afmetingen of massa kunnen leggen. Soms is een grootheid zo belangrijk dat we wel een eigen benaming voor de grootheid hebben, zoals de eenheden voor kracht (Newton = N) en energie (Joule = J). In de tabel zijn een aantal eenheden gegeven

Engels	Nederlands	eenheid (MKS)	eenheid (specifiek)
position	plaats (positie)	m	
time	tijd	s	
velocity/speed	snelheid (plaats/tijd)	m/s	
acceleration	versnelling (snelheid/tijd)	m/s <sup>2</sup>	
angular velocity	hoeksnelheid (hoek/tijd)	rad/s	
mass	massa	kg	
force	kracht	kg m/s <sup>2</sup>	N (Newton)
pressure	druk (kracht/oppervlakte)	kg/m s <sup>2</sup>	Pa = N/m <sup>2</sup> (Pascal)
energy	energie	kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	J (Joule)
momentum	impuls (hoeveelheid van beweging)	kg m/s	
angular momentum	impulsmoment	kg m <sup>2</sup> /s	J s
power	vermogen (energie/tijd)	kg m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	W = J/s (Watt)

<sup>1</sup>Eigenlijk *hoeveelheid van beweging*

## 1.4 Numeriek

Om de numerieke waarde van grootheden te geven gebruiken we de *scientific notation*, grondgetal vermenigvuldigd met machten van 10, bijvoorbeeld de massa van een elektron is<sup>2</sup>  $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$  kg. Wanneer we de bovenstaande waarde voor de elektronmassa gebruiken in berekeningen, moeten we opletten dat we met drie decimalen werken en dat we dus, wat we ook doen, nooit met antwoorden moeten komen met meer dan drie *significante* cijfers. Willen we een grotere precisie dan moeten we meer decimalen gebruiken of de fout in de grootheid meenemen. Over precisie gesproken, op dit moment kennen we de waarde van de elektronmassa als  $m_e = 9.109\,382\,15(45) \times 10^{-31}$  kg. Dit is een veelgebruikte notatie die betekent dat er een onzekerheid van  $\pm 45$  in de laatst gegeven twee decimalen zit.

Het is vaak handiger om in plaats van de machten van 10 een voorvoegsel aan de eenheid toe te voegen. Die zijn in de volgende tabel gegeven:

veelvoud	voorvoegsel	afkorting	veelvoud	voorvoegsel	afkorting
$10^{-1}$	deci	d	$10^1$	deka	da
$10^{-2}$	centi	c	$10^2$	hecto	h
$10^{-3}$	milli	m	$10^3$	kilo	k
$10^{-6}$	micro	$\mu$	$10^6$	mega	M
$10^{-9}$	nano	n	$10^9$	giga	G
$10^{-12}$	pico	p	$10^{12}$	tera	T
$10^{-15}$	femto	f	$10^{15}$	peta	P
$10^{-18}$	atto	a	$10^{18}$	exa	E

## 1.5 Domein van de klassieke mechanica

Zoals al gezegd zijn er grenzen aan het domein waar de klassieke mechanica werkt. Hier hebben we te maken met twee fundamentele constanten, die we in de natuurkunde tegenkomen, namelijk de constante van Planck  $h$ ,

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s},$$

en de lichtsnelheid

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

Wanneer de grootheden waar het bij een probleem om gaat van de orde van grootte van de constante van Planck worden, kunnen we niet meer volstaan met de klassieke mechanica. Voor een bewegend deeltje verliest het begrip *positie* zijn betekenis. We kunnen nog wel preciese berekeningen doen, maar moeten een ander raamwerk gaan gebruiken, de Schrödinger vergelijking in plaats van de wetten van Newton. Overigens, wanneer we een systeem quantummechanisch hebben beschreven, blijkt het systeem zich in de klassieke limiet gewoon volgens de wetten van Newton te gedragen. De constante van Planck komt in allerlei grootheden en relaties voor. Bijvoorbeeld impulsmoment kan als een veelvoud van  $\hbar = h/2\pi$  geschreven worden (dezelfde dimensie), maar het bijzondere van de quantummechanica is dat dit veelvoud alleen een geheel getal kan zijn. Ook grootheden als impuls  $\times$  positie of energie  $\times$  tijd hebben dezelfde dimensie als  $h$  en vertonen quantummechanische effecten op die schaal.

Bij de tweede fundamentele constante, de lichtsnelheid, gebeuren er vreemde dingen als de snelheden in de richting van  $c$  gaan. We moeten een heleboel bekende uitdrukkingen voor grootheden zoals energie en impuls, het optellen van snelheden, anders aanpakken. Het raamwerk hiervoor is de speciale relativiteitstheorie. In de limiet van kleine snelheden vinden we ook weer gewoon alle bekende vergelijkingen van de klassieke mechanica.

Het fundamentele karakter van de lichtsnelheid  $c$  en met name het feit dat die snelheid ongeacht de beweging van waarnemers altijd dezelfde is, maakt het mogelijk om de eenheden seconde en meter te koppelen. Dat is gebeurd door de lichtsnelheid te definiëren als exact het bovengenoemde getal. Met de aanwezigheid van een standaard voor de seconde hebben we dan de standaard voor meter niet meer nodig. Die kunnen we met een lichtbundel en een preciese klok zelf reconstrueren. In principe zou de constante van Planck  $h$  op eenzelfde manier gebruikt kunnen worden om de kilogram (of directer de Joule) vast te leggen.

<sup>2</sup>Merk op dat in text-editors zoals LaTeX eenheden *niet* in equation-mode behoren te worden geschreven; verder gebruiken we in deze aantekeningen de Engelse notatie en niet de Nederlandse die zou zijn  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg.

## 2 Beweging in ruimte en tijd

### 2.1 Beweging langs een lijn (één dimensie)

De beweging van een object langs een lijn kan worden beschreven met een plaatsfunctie  $x(t)$ . Als het object op positie  $x_1 = x(t_1)$  is op tijdstip  $t_1$  en op positie  $x_2 = x(t_2)$  op tijdstip  $t_2$ , wordt de *verplaatsing* gedefinieerd als  $\Delta x = x_2 - x_1$  in het tijdsinterval  $\Delta t = t_2 - t_1$ . De gemiddelde snelheid is

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1)$$

De instantane snelheid op tijdstip  $t$  is de limiet waarbij we  $t_1 = t$  nemen en  $t_2 = t + \Delta t$  naar  $t$  laten gaan<sup>3</sup>,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t). \quad (2)$$

De snelheidsfunctie<sup>4</sup> is de tijdsafgeleide van de plaatsfunctie. In de grafiek van  $x$  als functie van  $t$  is dat de helling van de functie. Omgekeerd is de plaatsfunctie de primitieve van de snelheidsfunctie. In de grafiek van  $v$  als functie van  $t$  is dat de oppervlakte tussen de grafiek en de  $t$ -as ( $v = 0$ ) op het interval tussen  $t_1$  en  $t_2$ , waarbij het teken van belang is en iets zegt over de richting van de verplaatsing. In formule, uit de snelheidsfunctie kunnen we verplaatsingen afleiden gebruikmakend van

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt v(t). \quad (3)$$

De versnelling  $a$  is de verandering van snelheid per tijdseenheid en we kunnen op dezelfde manier als voor snelheid van gemiddelde versnelling en instantane versnelling spreken. De laatste is weer de afgeleide, nu van de snelheidsfunctie en dus de tweede afgeleide van de plaatsfunctie,

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t). \quad (4)$$

We kunnen, omgekeerd, snelheidsverschillen (let wel op: verschillen) vinden door de versnellingsfunctie te integreren net zoals verplaatsingen (verschillen in plaats) verkregen werden uit de snelheidsfunctie. We bekijken nu enkele speciale gevallen.

#### Eenparige beweging

Een eenparige beweging is een beweging met constante snelheid (dus  $a = 0$ ),

$$v(t) = v_0, \quad (5)$$

en we vinden

$$x(t) - x(0) = \int_0^t dt' v(t') = v_0 t \quad \implies \quad x(t) = v_0 t + x_0. \quad (6)$$

#### Eenparig versnelde beweging

Een eenparige versnelde beweging is een beweging met constante versnelling

$$a(t) = a_0, \quad (7)$$

waarvoor we eenvoudig vinden

$$v(t) - v(0) = \int_0^t dt' a(t') = a_0 t \quad \implies \quad v(t) = a_0 t + v_0. \quad (8)$$

---

<sup>3</sup>Voor de afgeleide van een functie  $f(x)$  wordt in het algemeen de notatie  $f'(x)$  gebruikt, maar de punt op de grootheid is gebruikelijk voor tijdsafgeleiden.

<sup>4</sup>Let op dat de snelheid (velocity) positief en negatief kan zijn. In het Engels wordt het begrip *speed* gebruikt als de absolute waarde van de *velocity*.

en

$$x(t) - x(0) = \int_0^t dt' (a_0 t' + v_0) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t \quad \implies \quad x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0. \quad (9)$$

De  $x - t$  grafiek is een parabool. De bekendste eenparig versnelde beweging is het vallen van objecten aan het aardoppervlak ten gevolge van de zwaartekracht. De (ongeveer overal dezelfde) versnelling is

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2,$$

gericht naar het centrum van de Aarde. De toepassingen in deze paragraaf, waar we ons beperken tot één richting kunnen gebruikt worden om de hoogte  $h(t)$  te beschrijven, waarbij we dan wel moeten opletten dat de valversnelling naar beneden gericht is en we als versnelling  $-g$  moeten gebruiken.

## Relatieve beweging

Vaak hebben we in plaats van de positie en snelheid van een object t.o.v. een oorsprong (zeg maar vaste achtergrond) te maken met positie en snelheid van twee objecten t.o.v. elkaar. Als de positie van A en B gegeven worden door  $x_A(t)$  en  $x_B(t)$  dan is de relatieve positie van B t.o.v. A gegeven door

$$x_{BA}(t) = x_B(t) - x_A(t),$$

wat na differentiëren

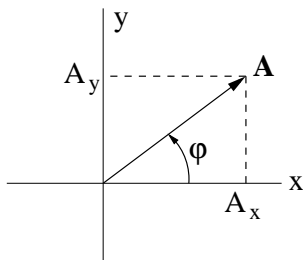
$$v_{BA}(t) = v_B(t) - v_A(t)$$

geeft<sup>5</sup>. Herschreven als  $v_B(t) = v_A(t) + v_{BA}(t)$  zien we dat de snelheid van B t.o.v. de oorsprong gegeven wordt door de snelheid van A t.o.v. de oorsprong plus de relatieve snelheid van B t.o.v. A, wat weer de afgeleide is van de relatieve positie van B t.o.v. A. We besteden hier aandacht aan ook al lijkt dit heel vanzelfsprekend, omdat in een relativistische situatie (snelheden in orde van grootte van de lichtsnelheid) het bovenstaande niet meer zo blijft (klokken van t.o.v. elkaar bewegende objecten geven verschillende tijden aan).

## 2.2 Beweging in een vlak (twee dimensies)

Het belangrijkste verschil met de vorige paragraaf is dat we nu te maken hebben met de positie in een vlak (naast de tijd  $t$ ). In dat geval werken we met vectoren. Positie, snelheid en versnelling zijn vectoren, gekenmerkt door een *grootte* en een *richting*. We noteren vectoren vetgedrukt. Ook andere notaties worden veel gebruikt, zoals  $\vec{A}$  of  $\underline{A}$ .

Na introductie van een assenstelsel met onderling loodrechte richtingen, kunnen we een vector  $\mathbf{A}$  ontbinden in twee componenten. We schrijven



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos \varphi \\ A \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (10)$$

waar we gebruik hebben gemaakt van de lengte van de vector,

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad (11)$$

en de azimuthale hoek  $\varphi$  die positief gerekend wordt vanaf de x-richting (draaiend tegen de klok in). In doorlopende tekst schrijven we meestal  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$ . Voor de lengte wordt ook de notatie  $|\mathbf{A}|$  gebruikt.

Vectoren beschrijven in het algemeen verplaatsingen. Zelfs als we de punten in een vlak met de vector

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (12)$$

<sup>5</sup>Om verwarring te voorkomen met plus- en min-tekenen kan het handig zijn om  $x_A$  weer te zien als  $x_{AO} = x_A - x_O$  waar  $O$  de oorsprong is met  $x_O = 0$ .

beschrijven, bedoelen we de verplaatsing t.o.v. een gekozen oorsprong. We kunnen een vector ook in termen van poolcoördinaten  $(r, \varphi)$  geven. (Wees hier voorzichtig mee zijn want dit zijn geen componenten van een vector.) Met vectoren kunnen we allerlei operaties uitvoeren. We kunnen twee verplaatsingen na elkaar doen, corresponderend met het optellen van vectoren,  $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ; we kunnen vectoren met een getal (scalair) vermenigvuldigen, corresponderend met grotere of kleinere verplaatsingen; bijzonder is het getal  $-1$  wat de vector  $-\mathbf{A}$  oplevert, een verplaatsing in omgekeerde richting (let op: de corresponderende azimuthale hoek is  $\varphi + \pi$ ); we kunnen dan ook vectoren van elkaar aftrekken,  $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ . Het is nuttig om jezelf vertrouwd te maken met deze operaties. In de beschrijving met componenten wordt optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal heel eenvoudig, namelijk deze operaties componentsgewijze uitvoeren. Ga dat voor een aantal voorbeelden na. De componenten van een vector kun je in feite ook zien als de getallen waarmee de eenheidsvectoren  $\hat{x} \equiv (1, 0)$  en  $\hat{y} = (0, 1)$  (dat zijn vectoren met lengte 1 langs de x-as en de y-as) vermenigvuldigd worden en die twee vectoren geven waarvan de vector  $\mathbf{A}$  dan de som is, in formule

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = A_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}. \quad (13)$$

Ons realiserend dat positie  $\mathbf{r}$ , snelheid  $\mathbf{v}$  en versnelling  $\mathbf{a}$  een grootte en richting hebben (vector-grootheden), terwijl tijd slechts een grootte heeft (scalaire grootheid), kunnen we de resultaten voor één dimensie generaliseren en we hebben voor de snelheid als functie van de tijd,

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t). \quad (14)$$

en voor de versnelling

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}(t). \quad (15)$$

Dit correspondeert gewoon met onafhankelijke vergelijkingen voor de componenten. Ook de relatieve snelheden kunnen vectoriëel opgeteld worden,

$$\mathbf{v}_{BO} = \mathbf{v}_{AO} + \mathbf{v}_{BA}. \quad (16)$$

## 2.3 Banen bij een beweging

[Opmerking: maak voor jezelf schetsen als je deze paragraaf leest]

Bij een beweging hebben we in het algemeen meerdere coördinaten die veranderen als functie van de tijd, bijvoorbeeld  $x(t)$  en  $y(t)$ . De verzameling van alle punten die gedurende een bepaald tijdsinterval (en dat kan best tot van min oneindig tot plus oneindig lopen) is wat we de (beschreven) *baan* van een systeem noemen. In het algemeen wordt zo'n baan beschreven door een verband tussen  $x$  en  $y$ . Het gemakkelijkste is dit te illustreren aan een voorbeeld.

Kijken we naar de beweging van een projectiel dan hebben we te maken met twee richtingen, een horizontale (noem deze  $x$ ) en een vertikale (noem deze  $y$ ). In de vertikale richting ondervindt het systeem een versnelling naar beneden ter grootte van  $a_y = -g$  (de valversnelling). In de horizontale richting is er geen versnelling. De horizontale en vertikale bewegingen zijn eendimensionale eenparige en eenparig versnelde bewegingen,

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t, \quad (17)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (18)$$

Om de precieze baan te weten zien we dat we wel de begincondities moeten weten. Stel dat we weten dat  $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$  en de beginsnelheid gelijk is aan  $v_0 = (10, 10)$  (in m/s). Dan krijgen we met  $g = 10 \text{ m/s}^2$

$$x(t) = v_{0x} t,$$

$$y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2.$$

$$x(t) = 10 t,$$

$$y(t) = 10 t - 5 t^2.$$

We kunnen uit deze vergelijkingen de tijd  $t$  elimineren en vinden de baan

$$\begin{aligned}
y &= \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2 & y &= x - \frac{1}{20} x^2 \\
&= -\frac{g}{2v_{0x}^2} \left( x - \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} \right)^2 + \frac{v_{0y}^2}{2g}. & &= -\frac{1}{20} (x - 10)^2 + 5.
\end{aligned}$$

Dit is de bij valbewegingen of kogelbanen karakteristieke parabolbaan. Het herschrijven wat we hierboven hebben gedaan is handig om bijvoorbeeld direct de maximale hoogte af te lezen ( $y_{\max} = 5$  m). Maar uit de baanvergelijking kunnen we niet meer zien wanneer het maximum wordt bereikt, wel voor welke  $x$ -waarde, namelijk  $x = 10$  m. We moeten terug naar het  $x - t$  verband om het tijdstip te vinden ( $t = 1$  s). Merk op dat van het wiskundig gevonden resultaat (de parabool in het  $x - y$  vlak sommige stukken onfysisch zijn, bijvoorbeeld bij beweging van een projectiel op een vlak veld alles beneden de  $x$ -as).

In het algemeen hebben we bij een beweging waarbij de versnelling bekend is, twee gegevens per component nodig. Dat komt omdat alleen de tweede tijdsafgeleide bekend is en we twee keer moeten integreren wat elke keer een integratieconstante oplevert. Dit hoeven natuurlijk niet noodzakelijk begincondities te zijn. Bijvoorbeeld het is mogelijk de beweging in de  $x$ -richting op te lossen als naast  $\ddot{x}(t)$ ,  $x(t_1)$  en  $x(t_2)$  bekend zijn, of als  $x(t_1)$  en  $v_x(t_2)$  bekend zijn. Bij bewegingen in meer dimensies kunnen een of meerdere van de randvoorwaarden een impliciet verband tussen de verschillende componenten bevatten, bijvoorbeeld een vraag wat de beginsnelheid bij bovenstaande projectielbeweging zou moeten zijn als het maximum  $y_{\max} = 5$  m bereikt wordt bij  $x = 20$  m. Het prettige van de analytische uitdrukking is dat we er allerlei dingen verder aan kunnen onderzoeken. Bijvoorbeeld de afstand waar de kogel de grond raakt is  $x = 2v_{0x}v_{0y}/g$ . Bij gegeven beginsnelheid  $v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$  is die afstand maximaal als  $v_{0x} = v_{0y} = v/\sqrt{2}$  (bewijs dat!). Maar ga dit soort analytische uitdrukkingen niet uit je hoofd leren!

## 2.4 Cirkelbeweging

Een vaak terugkomende beweging is de cirkelbaan. Hierbij is de snelheid zeker niet constant. Zelfs als de grootte van de snelheid constant is, verandert voortdurend de richting! Er is dus een versnelling, waarvan we de grootte en richting hieronder zullen afleiden. We zullen in het volgende hoofdstuk zien dat zo'n (versnelde) beweging niet vanzelfsprekend is, maar de aanwezigheid van een kracht vereist zoals de beweging van planeten om de Zon. Ook kan het zijn dat de beweging veroorzaakt wordt door de aanwezigheid van een koord of een staaf (slinger) of doordat verschillende starre delen met elkaar verbonden zijn (spieren).

Bij een cirkelbeweging is de afstand tot een bepaald punt (het middelpunt) constant. Het is dan ook vaak handig dat middelpunt als oorsprong voor het gebruikte coördinatensysteem te gebruiken. Bij een cirkelbeweging wordt de baan (verbanden tussen  $x$  en  $y$  of tussen  $r$  en  $\varphi$  waar de tijd niet in voorkomt) gegeven door

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{of} \quad r = R. \quad (19)$$

Het eenvoudigste is dus de beschrijving in termen van poolcoördinaten. We hebben

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi(t) \\ R \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \quad (20)$$

De beweging wordt beschreven door de tijdsafhankelijkheid van de azimuthale hoek. De afgeleide van deze heet de *hoeksnelheid*,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t). \quad (21)$$

Voor een *uniforme cirkelbeweging* hebben we

$$\varphi(t) = \omega t, \quad (22)$$

dus een constante hoeksnelheid. We zien dat de azimuthale hoek groeit, terwijl de afstand tot de oorsprong constant is. De uniforme cirkelbeweging is periodiek en herhaalt zich na periode  $T$  waarvoor geldt  $\varphi(t + T) \equiv \varphi(t) + 2\pi$  waaruit we vinden

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T}. \quad (23)$$

De snelheid kunnen we eenvoudig bepalen door de positie te differentiëren naar de tijd,

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R \sin \varphi(t) \\ \omega R \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \quad (24)$$

De grootte van de snelheid wordt gegeven door  $v = |\mathbf{v}| = \omega R$ . Bij een uniforme cirkelbeweging is de grootte constant, maar de richting van de snelheid verandert nog wel, dus ook in dat geval is er een versnelling. Merk op dat bij een uniforme cirkelbeweging de langs de cirkelbaan afgelegde weg in een periode precies gelijk is aan de omtrek,  $vT = 2\pi R$ .

De versnelling vinden we door nog een keer naar de tijd te differentiëren. We doen dit hier alleen voor een uniforme cirkelbeweging en vinden dan

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 R \cos(\omega t) \\ -\omega^2 R \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (25)$$

We zien dat de grootte van de versnelling constant is en gegeven wordt door

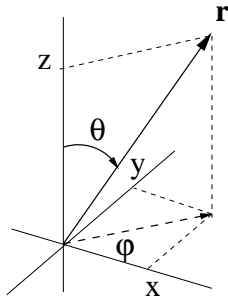
$$a = |\mathbf{a}| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}. \quad (26)$$

De versnelling inclusief richting wordt *bij een uniforme cirkelbeweging* gegeven door  $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$ . Deze *centripetale* versnelling is een vector die voortdurend naar het centrum van de cirkel gericht is.

## 2.5 Beweging in de ruimte (drie dimensies)

Voor de beschrijving van  $\mathbf{r}(t)$  in drie dimensies gebruiken we vectoren in de driedimensionale ruimte, wat een directe uitbreiding is van wat we hebben gezien voor twee dimensies. We merken op dat we in de driedimensionale ruimte drie loodrechte basisvectoren kunnen kiezen,  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  en  $\hat{\mathbf{z}}$ . Het begrip loodrecht zal bij de behandeling van inproducten van twee vectoren nog preciezer gemaakt worden.

Ook hier is het vaak nuttig om i.p.v. met de Cartesische coördinaten met poolcoördinaten te werken. De standaardkeuze is



$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (27)$$

De hoek  $\theta$  met de z-as heet *poolhoek* en loopt van  $0 \leq \theta \leq \pi$ . De projectie langs de z-as (de z-component) heeft lengte  $r \cos \theta$ , de lengte van de projectie in het x-y-vlak heeft lengte  $r \sin \theta$ . Deze projectie maakt weer een hoek met de x-as. Deze hoek  $\varphi$  met de x-as heet de *azimuthale hoek* en heeft als bereik  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . De projecties langs x-as en y-as hebben dan lengtes  $r \sin \theta \cos \varphi$  en  $r \sin \theta \sin \varphi$ , respectievelijk, wat de uitdrukkingen in vgl. 27 geeft.

Uit  $\mathbf{r}(t)$  kunnen we net als in twee dimensies weer de snelheid en versnelling vinden, met dien verstande dat alle vectoren drie componenten hebben.

## 2.6 \*Fundamentele symmetrieën

### Translaties in ruimte en tijd

De keuze van de oorsprong mag natuurlijk niet uitmaken bij de beschrijving van een systeem. We moeten natuurlijk wel weten wat het verband is tussen verschillende referentiesystemen. Er zijn een aantal *transformaties* die we op onze coördinaten kunnen toepassen waarbij de fysische beschrijving niet verandert.

De eerste set van transformaties zijn translaties in ruimte of tijd,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}, \quad (28)$$

$$t' = t + \tau. \quad (29)$$

Deze transformaties komen neer op het kiezen van het nulpunt van het coördinatensysteem of het ijkten/resetten van de klok. Het is eenvoudig te zien dat zulke transformaties snelheden of versnellingen waar het om verschillen gaat niet veranderen.

## Rotaties

Een tweede set van transformaties zijn rotaties in de ruimte. Rotaties worden gekenmerkt door een as, bijvoorbeeld de  $z$ -as en een rotatiehoek  $\alpha$ . Een rotatie om de  $z$ -as verandert de  $x$ - en  $y$ -coördinaten. Wanneer we poolcoördinaten gebruiken is de transformatie overigens heel eenvoudig op te schrijven,

$$r' = r, \quad (30)$$

$$\varphi' = \varphi + \alpha. \quad (31)$$

Gebruikmakend van goniometrische relaties voor som van hoeken,

$$\begin{aligned} \sin(\varphi + \alpha) &= \sin(\varphi) \cos(\alpha) + \cos(\varphi) \sin(\alpha), \\ \cos(\varphi + \alpha) &= \cos(\varphi) \cos(\alpha) - \sin(\varphi) \sin(\alpha), \end{aligned}$$

vinden we de transformatie van  $x$ - en  $y$ -coördinaten,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Rotaties veranderen weliswaar wel snelheden en versnellingen, maar alleen op een 'triviale' manier, namelijk door een herdefinitie van de richtingen. Wat in veel toepassingen belangrijk zal blijken is dat de hoek tussen twee vectoren niet verandert. Beide vectoren krijgen andere richtingen, maar hun onderlinge hoek verandert niet.

## Relativiteit en de speciale Galilei transformaties

Dit is een minder bekende transformatie. Het beschrijft hoe de coördinaten  $\mathbf{r}$  er uit zien vanuit een systeem dat met een eenparige snelheid beweegt. Dat is van belang omdat blijkt dat absolute snelheid net als plaats en tijd niet vast te stellen is. In een systeem dat met een relatieve snelheid  $\mathbf{u}$  beweegt t.o.v. een systeem (met coördinaten  $\mathbf{r}$  en  $t$ ) worden de coördinaten

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{u}t, & \text{of} & & \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{u}t', \\ t' &= t, & & & t &= t', \end{aligned} \quad (33)$$

We zien dat de consequentie is dat  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ , het al genoemde feit dat we relatieve snelheden kunnen optellen of aftrekken. Merk op dat versnellingen hetzelfde zijn in beide referentiesystemen. Net als bij rotaties en translaties kunnen we heen en weer transformeren (een transformatie heeft een *inverse*). Voor de speciale Galilei transformaties hebben we dat even expliciet gemaakt.

In totaal zijn er in onze 3-dimensionale wereld dus 10 transformaties, 4 translaties, 3 rotaties en 3 speciale Galilei transformaties, waaronder de beschrijving van de fysica niet verandert. Merk op dat deze aantallen kenmerkend zijn voor de dimensie van de ruimte. Ruimte-translaties zijn er net zo veel als (onafhankelijke) richtingen, d.w.z. de dimensie van de ruimte. Er is maar één tijd-translatie. Rotaties worden in wezen gekenmerkt door het aantal (onafhankelijke) vlakken, bijvoorbeeld het  $x$ - $y$ -vlak voor een rotatie om de  $z$ -as. In één vlak (een 2-dimensionale ruimte) is er maar één rotatie, in de 3-dimensionale ruimte zijn er drie. In onderstaande tabel zijn de aantallen in een  $d+1$  dimensionale ruimte gegeven, een notatie waarmee men  $d$  ruimte-dimensies en de tijd aangeeft.

# ruimte-tijd dimensies	1 + 1	2 + 1	3 + 1	$d + 1$
# translaties	2	3	4	$d + 1$
# rotaties	0	1	3	$d(d - 1)/2$
# speciale Galilei transformaties	1	2	3	$d$
# fundamentele transformaties	3	6	10	$(d + 1)(d + 2)/2$

## 2.7 \*Speciale relativiteitstheorie en discrete symmetriën

De relativiteit in de vorige paragraaf werkt weliswaar voor alledaagse snelheden, maar het blijkt wel een limietsituatie te zijn. De transformatie van coördinaten blijkt namelijk niet beschreven te worden door de speciale Gallileitransformaties, maar door de boosts (Lorentz transformaties). Boosts beschrijven de overgang tussen twee systemen die met een eenparige snelheid  $\mathbf{u}$  t.o.v. elkaar bewegen (we zullen  $\mathbf{u}$  voor gemak langs z-as kiezen, zodat  $x' = x$  en  $y' = y$ ),

$$\begin{aligned} z' &= \frac{z - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & \text{of} & & z &= \frac{z' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ t' &= \frac{t - uz/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & & & t &= \frac{t' + uz'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (34)$$

een transformatie waarin de ruimtetijd coördinaten  $ct$  en  $\mathbf{r}$  gelijkwaardig zijn. In de limiet  $u/c \rightarrow 0$  (voor kleine snelheden  $u$ ) krijgen we de speciale Galilei transformaties. Het is eenvoudig om na te gaan dat  $z^2 - c^2t^2 = z'^2 - c^2t'^2$ , d.w.z. dat een met de lichtsnelheid bewegend systeem ( $z = ct$ ) ook voor een met snelheid  $u$  bewegende waarnemer met de lichtsnelheid beweegt ( $z' = ct'$ ). Snelheden optellen kan dus niet meer gewoon. Uitschrijven van  $v'_z = dz'/dt'$ , in termen van  $dt$  en  $dz$  laat zien dat

$$v'_z = \frac{v_z - u}{1 - uv_z/c^2}, \quad (35)$$

dus ongelijk aan het 'klassieke' resultaat, wat de som of het verschil van de snelheden was.

Het feit dat deze tien symmetriën (3 boosts, 3 rotaties en 4 translaties) passen bij onze wereld is niet iets dat we kunnen bewijzen. Het is een feit! We kunnen er nuttig gebruik van maken bij het beschrijven van bewegingen in ruimte en tijd. Naast bovengenoemde symmetriën zijn er ook nog enkele zogenaamde discrete symmetriën. De naam 'discreet' voor deze symmetrie slaat op het feit dat je de transformatie wel of niet kunt toepassen, maar geen parameter hebt die je kunt variëren (zoals de hoek bij rotaties). Een zo'n discrete symmetrie is *ruimte-inversie* waarbij de coördinaten van teken veranderen

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z. \quad (36)$$

Dat blijkt in de wereld van alledag een prima symmetrie, maar in de wereld van het kleine, de elementaire deeltjes en dan met name voor neutrino's, blijkt die niet meer op te gaan. Ook hier waargenomen feiten! Een andere symmetrie is *tijdsomkeer* waarbij de tijd van richting omdraait

$$t' = -t, \quad (37)$$

een symmetrie die voor de vergelijkingen in de makroskopische wereld geldt, maar in de wereld van het kleine (of ook het allergrootste, de Big Bang) niet meer opgaat. Nu zul je zeggen dat de tijd omdraaien niet zomaar kan en dat klopt ook. Maar symmetrie betekent enkel dat de situatie na het toepassen van een symmetrietransformatie ook een fysische mogelijkheid is, die kan bestaan, al is die misschien onwaarschijnlijk.

### 3 Newtoniaanse mechanica en toepassingen

#### 3.1 De wetten van Newton

Hier speelt het concept *kracht* een rol. Zonder kracht voert een systeem een eenparige beweging uit, waar de (samenhangende) grootheden positie, tijd en snelheid puur afhankelijk zijn van de keuze van referentiesysteem (fundamentele symmetrie). Een kracht verandert deze grootheden en dat kan alleen op heel specifieke manier waarbij een aantal grootheden wel verandert en een aantal andere juist niet. De wetten van Newton vertellen hoe in een drie-dimensionale ruimte een *kracht* een versnelling veroorzaakt. Kracht is net als versnelling een vectorgrootheid en heeft een grootte en een richting. We formuleren het als krachten werkend op een voorwerp of meer algemeen op een systeem wat ook kan bestaan uit een aantal voorwerpen.

1. Een voorwerp waarop geen externe kracht werkt is in rust of beweegt met een constante snelheid (eenparig).
2. De som van alle krachten ( $\mathbf{F}_{\text{tot}}$ ) op een voorwerp geeft aanleiding tot een versnelling. De relatie tussen versnelling en kracht is de bekende relatie

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = m \mathbf{a} \quad \text{of} \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_{\text{tot}}}{m}. \quad (38)$$

De evenredigheidsconstante is de *massa*, ook wel traagheid genoemd. Hoe groter de massa/traagheid, des te kleiner is de versnelling die het resultaat is van een bepaalde nettokracht op dat voorwerp.

3. Wanneer voorwerpen krachten op elkaar uitoefenen zijn deze krachten even groot, maar tegengesteld ( $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ). Dit is vanzelfsprekend als we bedenken dat beide voorwerpen (ongeacht hun beweging ten opzichte van elkaar) samen een eenparige beweging moeten uitvoeren en er dus op het totale systeem geen netto kracht is.

Terwijl krachten op allerlei manieren en plaatsen optreden, is massa een intrinsieke eigenschap van een object. Een elektron heeft een massa, een proton of een molecuul hebben andere massa's. Het is vergelijkbaar met eigenschappen zoals elektrische lading of ook temperatuur<sup>6</sup>.

We zien uit de tweede wet van Newton dat de eenheid van kracht vastligt is in het MKS systeem. Maar krachten spelen op zo veel plaatsen een rol dat de eenheid een eigen benaming heeft gekregen, de *Newton*,

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2.$$

#### 3.2 Fundamentele krachten

In de natuur vinden we een groot aantal krachten met allerlei eigenschappen, afhankelijk of juist onafhankelijk van plaats, snelheid, tijd. In het dagelijks leven kennen we bijvoorbeeld de zwaartekracht. Dit is een kracht die massa's op elkaar uitoefenen. Aan het Aardoppervlakte is het cumulatieve effect van alle andere massa's een naar het middelpunt van de Aarde gerichte kracht,

$$\mathbf{F}_z = m \mathbf{g}. \quad (39)$$

We spreken van het *gewicht* van een voorwerp. Omdat op het Aardoppervlak de afstand tot het middelpunt van de Aarde overal ongeveer hetzelfde is en de massaverdeling binnen de Aarde redelijk bolsymmetrisch is, varieert  $g$  niet al te sterk. De waarde is  $g = 9.81 \text{ N/kg}$  of  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Het bijzondere aan de zwaartekracht is dat de oorzaak van de kracht, de massa is (daarom ook wel *zware* massa genoemd). Het blijkt nu dat

$$\text{zware massa} = \text{trage massa},$$

wat ook bekend staat als het *equivalentieprincipe*. De consequentie is dat het resultaat van de zwaartekracht (gewicht) is dat een voorwerp een versnelling  $a = F_z/m = g$  ondervindt, in het dagelijks spraakgebruik wel vertaald als 'alle voorwerpen vallen even snel', maar wat preciezer dus betekent dat ten gevolge van de zwaartekracht de valversnelling voor alle voorwerpen dezelfde is. De zwaartekracht is een van de vier fundamentele krachten die we kennen,

<sup>6</sup>Degenen die nu zeggen dat je temperatuur kunt veranderen en massa niet, wacht straks nog een verrassing.

- gravitatiekracht — de aantrekkende kracht tussen massa's,
- elektromagnetisme — de aantrekkende of afstotende kracht veroorzaakt door elektrische ladingen,
- sterke kracht — de krachten tussen de bouwstenen van de atoomkern veroorzaakt door de *kleurladingen* van quarks en gluonen,
- zwakke kracht — een kracht die de ene soort deeltjes in een andere soort kan veranderen en daarmee radioactieve vervalprocessen induceert.

Voor alle krachten geldt dat het versnellende effect gegeven wordt door de wet van Newton, waarbij de massa de traagheid bepaalt. Bij elektrische, sterke en zwakke krachten speelt de massa geen rol bij de kracht zelf. Bij elk van deze krachten zijn er specifieke ladingen, die aanleiding geven tot uitwisseling van voor iedere kracht specifieke krachtdeeltjes. Die beschrijving maakt het mogelijk deze krachten binnen één raamwerk te beschrijven, wat bekend staat als het *Standaardmodel voor de elementaire deeltjes*.

### 3.3 Afgeleide krachten

Terug naar de alledaagse wereld, waar gravitatie en elektromagnetisme de dienst uitmaken. Voor beide zullen de krachten die twee voorwerpen op elkaar uitoefenen netjes even groot en tegengesteld zijn. Maar in veel praktische situaties is een van de veroorzakers van een kracht veel groter, zodat we de resulterende kracht op een systeem zullen bekijken. We hebben al het naar het centrum van de Aarde gerichte gewicht genoemd (waarbij we ons meestal niet bekommeren om de kracht die zo'n voorwerp op de Aarde uitoefent). Het feit dat vaste voorwerpen niet door elkaar heen kunnen of dat voorwerpen wrijving ondervinden in vloeistoffen of in de lucht, zijn (collectieve) manifestaties van elektromagnetische krachten, die bekend staan als afgeleide krachten, zoals:

- duw- of trekkrachten uitgeoefend op een voorwerp;
- *normaalkrachten*  $F_n$  met de richting loodrecht op een oppervlak. Een dergelijke kracht balanceert bijvoorbeeld een object dat op een tafel ligt. Er is tenslotte geen versnelling, dus er moet een kracht zijn tegengesteld aan de zwaartekracht. Normalkrachten zijn over het algemeen 'zo groot als nodig', maar het kan zijn dat er een maximum aan is (boven een bepaald gewicht zak je door de tafel!). Een weegschaal is in feite een meetapparaat voor de normaalkracht;
- *spankracht*  $F_s$  in een koord, net als de normaalkracht een kracht die 'zo groot als nodig' is en een maximum kan hebben (het breken van het koord). De richting van de spankracht is langs het koord gericht;
- *statische wrijving*

$$F_w \leq \mu_s F_n.$$

is ook weer een kracht die 'zo groot als nodig' is tot een maximum, dat afhangt van de normaalkracht die het oppervlak uitoefent op het voorwerp. De statische wrijvingscoëfficiënt  $\mu_s$  hangt af van de contactoppervlakken. Dit is een langs het oppervlak uitgeoefende kracht tegengesteld aan andere uitgeoefende krachten. Als die andere krachten het maximum  $\mu_s F_n$  overschrijden zal het voorwerp een versnelling krijgen omdat er een netto kracht overblijft;

- *dynamische of kinetische wrijving*

$$F = \mu_k F_n,$$

is de kracht langs het oppervlak als twee voorwerpen over elkaar heen schuiven. Ook deze coëfficiënt  $\mu_k$  zal van de aard van de oppervlakken afhangen;

- *veerkrachten* zijn krachten die optreden als elastische voorwerpen of bijvoorbeeld een veer worden ingedrukt of uitgerekt. De krachten zijn bij niet al te grote indrukking of uitrekking (aangegeven als uitwijking  $\Delta x$ ) in de regel evenredig hiermee en tegengesteld aan de uitwijking (wet van Hooke) genoteerd als

$$F = -k \Delta x,$$

waar  $k$  de *veerconstante* wordt genoemd;

- tot slot noemen we *sleep of 'drag' krachten* als voorwerpen door vloeistoffen of lucht bewegen. Hier is de kracht vaak evenredig met een macht van de snelheid en tegengesteld aan de richting van de snelheid van het voorwerp,

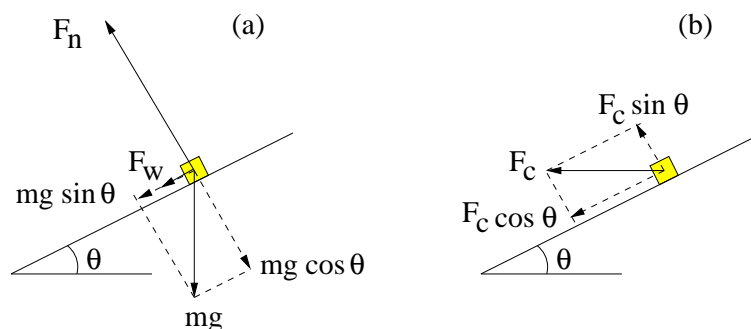
$$F = b v^n,$$

waar de coefficient  $b$  en de macht  $n$  van situatie tot situatie kunnen verschillen.

### 3.4 Analyse met vrije lichaamsdiagram en rekenen met Newton

Voor toepassingen van Newton's wet moeten we een probleem analyseren. We kunnen een plaatje maken en daar wat richtingen aangeven, maar het is belangrijk om daarna duidelijk van een bepaald voorwerp apart schematisch alle krachten aan te geven die er op werken, trekkrachten, wrijvingskrachten, normaalkrachten, zwaartekracht, etc. Van al die krachten bepaalt de resultante (let op richtingen en grootte's zijn van belang) de uiteindelijke versnelling. Zorg bij een schematische weergave er altijd voor dat je alle op een voorwerp werkende krachten goed onderscheidt van de resultante (bijvoorbeeld stippelijlijn en doorgetrokken lijn), of maak twee schema's (één met alle krachten en één met de resultante). Die resultante kan nul zijn in een statische situatie of bij een eenparige beweging of dat kan de oorzaak zijn van de centripetale (naar het centrum gerichte) versnelling die nodig is bij een cirkelbeweging.

Hieronder is het voorbeeld gegeven van het vrije lichaamsdiagram voor een auto die een hellende bocht (hellingshoek  $\theta$ ) doorgaat met snelheid  $v$ . De figuur is een dwarsdoorsnede, de snelheid van de auto staat hier loodrecht op. De rechterfiguur (b) geeft de nettokracht aan, namelijk de centripetale kracht  $F_c = m v^2/r$ , waar  $r$  de straal van de cirkelbaan is waarmee de bocht wordt genomen. Deze kracht is naar het centrum van de cirkelbaan gericht en kan worden ontbonden in twee componenten langs de baan en loodrecht op de baan. De linkerfiguur (a) is het eigenlijke vrije lichaamsdiagram, waarin de krachten aangegeven zijn die werken op de auto, de zwaartekracht  $F_z = m g$ , de normaalkracht  $F_n$  en de wrijvingskracht  $F_w$  waarvoor geldt  $F_w \leq \mu_s F_n$  ( $\mu_s$  is statische wrijvingscoefficient). Ook deze zijn ontbonden langs de baan en loodrecht op de baan.



Uit de figuur zien we de startvergelijkingen,

$$\begin{aligned} F_n - m g \cos \theta &= F_c \sin \theta, \\ F_w + m g \sin \theta &= F_c \cos \theta. \end{aligned}$$

Hoe deze te gebruiken hangt af van gegevens en vraagstelling.

### 3.5 Rekenen met Newton

Om het gebruik van de bewegingsvergelijkingen gegeven door Newton's wet te illustreren, kijken we naar de beweging van een massa op een cirkelbaan ten gevolge van een naar het centrum gerichte kracht. Voorbeelden zijn een massa die aan een koord rondslingerd of een planeet die de aantrekkingskracht van de Zon voelt. De vergelijking  $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$  wordt

$$\frac{G M m}{R^2} = m \frac{v^2}{R}, \quad (40)$$

waar de linkerkant de kracht is (met  $G$  de gravitatieconstante,  $M$  de massa van de Zon,  $m$  de massa van de in een cirkelbaan met straal  $R$  bewegende planeet). Die linkerkant is dus anders in een andere situatie, bijvoorbeeld gelijk aan de spankracht in het koord voor een rondslingerende massa. De rechterkant bevat de versnelling, bij een cirkelbeweging de versnelling nodig in een cirkelbaan (de centripetale versnelling  $a_c = v^2/R$  die afhangt van de tangentiële snelheid  $v$ ). We zien dat in het geval van de gravitatiekracht dat de massa  $m$  er niet toe doet. Herschreven als een verband tussen snelheid en straal hebben we

$$v^2 = \frac{GM}{R}.$$

In termen van de omlooptijd  $T = 2\pi R/v$ , vinden we

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

Deze relatie tussen omlooptijden van planeten en afstanden tot de Zon staat bekend als de derde wet van Kepler.

## 4 Arbeid en behoud van energie

### 4.1 Arbeid

Wanneer we een systeem hebben waarop geen krachten werken, dan beweegt het gehele systeem zich eenparig, d.w.z. met constante snelheid. Die snelheid verandert onder invloed van een kracht. Met behulp van grootheden als energie, impuls en impulsmoment kunnen we de effecten van een kracht gemakkelijk kwantificeren. Dat is het onderwerp van de komende hoofdstukken.

*Arbeid* is kracht  $\times$  verplaatsing. Het kan natuurlijk zijn dat de kracht niet overal hetzelfde is. In dat geval moeten we de effecten optellen. Bovendien houden we rekening met de richtingen. Het blijkt zinvol te zijn om bij te houden wat  $F_x dx$  is, waar  $F_x$  de kracht in de x-richting is en  $dx$  de verplaatsing in de x-richting en idem voor de andere richtingen. Het totaal is het *inproduct* van kracht en is de verrichte *arbeid* (Engels: work),

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (41)$$

Vaak werken we met de arbeid per tijdseenheid, het *vermogen* genoemd,

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z. \quad (42)$$

Om te zien wat er met de verrichte arbeid gebeurt, herschrijven we het vermogen als volgt,

$$F_x v_x = m \frac{dv_x}{dt} v_x = \frac{1}{2} m \frac{dv_x^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_x^2 \right)$$

en idem voor de andere richtingen. Samen krijgen we

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right) \quad \text{of} \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = d \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right). \quad (43)$$

Met name de tweede vergelijking vertelt ons wat er met de verrichte arbeid gebeurt. Deze veroorzaakt een verandering van de grootte aan de rechterkant, de *kinetische energie*

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2. \quad (44)$$

Dit zullen we in de volgende paragraaf verder uitwerken tot een behouden grootte, namelijk de *totale energie*.

#### Inproducten

In het bovenstaande zijn we het *inproduct* van twee vectoren tegengekomen. Dit is de grootte

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta, \quad (45)$$

waar  $\theta$  de hoek tussen deze twee vectoren is. Dit komt er op neer dat we de lengte van vector  $\mathbf{A}$  vermenigvuldigen met de projectie van  $\mathbf{B}$  langs  $\mathbf{A}$  (of omgekeerd). Het mooie van de basisvectoren  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  en  $\hat{\mathbf{z}}$ , die we gebruiken om vectoren te ontbinden, is dat  $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0$ , etc. Vectoren waarvan het inproduct nul is heten *orthogonaal* (ze staan loodrecht op elkaar). Omdat het inproduct een lineaire operatie is, vinden we via de ontbinding van vectoren dat in termen van de componenten

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (46)$$

In het bijzonder zien we dat de lengte van een vector in het kwadraat gelijk is aan het inproduct van die vector met zichzelf,  $|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ . De lengte van de basisvectoren  $\hat{\mathbf{x}}$  en  $\hat{\mathbf{y}}$  is 1. Dat soort vectoren heten *genormeerde* vectoren. Alleen als de basisvectoren loodrecht op elkaar staan (orthogonale basis) is de ontbinding in componenten uniek. Als de basisvectoren genormeerd zijn spreken we van een *orthonormale basis*. Het leuke van zo'n orthonormale basis is dat we de componenten kunnen vinden door het inproduct te nemen van een vector  $\mathbf{A}$  met de basisvector,  $A_x = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$  en  $A_y = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}}$ .

### Inproducten (vervolg)

Een eigenschap die we hierboven ook gebruikt hebben was

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (47)$$

een relatie die bewezen kan worden door het inproduct in componenten uit te schrijven.

De infinitesimale relaties kunnen natuurlijk uitgebreid worden tot eindige verschillen, waarbij we in de gevallen dat de kracht niet constant is zullen moeten integreren. Het totaal van de verrichte *arbeid*  $W$  is verantwoordelijk voor de totale verandering van kinetische energie gaande van begin naar eindsituatie. Deze totale arbeid schrijven we als een zogenaamde lijnintegraal

$$W = \int_{\text{pad}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2, \quad (48)$$

waar de eerste uitdrukking voor  $W$  degene is die je vrij standaard in boeken tegenkomt. Deze wordt gespecificeerd door de tweede uitdrukking. In feite kun je zelfs iedere parameter gebruiken die de baan parametrizeert.

## 4.2 Arbeid en energie

We kijken nu naar een aantal aspecten van arbeid. Recapitulerend, *arbeid* is het resultaat van de uitgeoefende kracht vermenigvuldigd met de verplaatsing in de richting van de kracht, in één dimensie gewoon  $dW = F_x dx$ , in drie dimensies  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ , wat voor een constante kracht en een rechte weg  $W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s} = F \Delta s \cos \theta$  (met  $\theta$  de tussenliggende hoek) wordt. Integreren is nodig als de kracht plaatsafhankelijk is. Bij de zwaartekracht aan het Aardoppervlak hebben we daar dus geen last van. Nogmaals, bij het begrip arbeid gaat het om de verplaatsing in de richting van de kracht, beschreven met het inproduct. Bij een eenparige cirkelbeweging wordt bijvoorbeeld geen arbeid verricht. Omdat de richting belangrijk is kan arbeid positief of negatief zijn. Als de kracht in dezelfde richting is als de weg (of beter als de hoek tussen kracht en weg minder dan 90 graden) is de arbeid positief, als de kracht tegengesteld (hoek groter dan 90 graden) is aan de verplaatsing is de arbeid negatief. De derde wet van Newton leerde ons al dat krachten in paren komen (actie = -reactie). Bij het optillen van een voorwerp is de kracht die ik moet uitoefenen in dezelfde richting, ik verricht dus (positieve) arbeid. Bij het laten zakken van een voorwerp is de kracht die ik uitoefen nog steeds omhoog (tegengesteld aan de zwaartekracht) maar de verplaatsing naar beneden, dus negatieve arbeid! In het eerste geval verricht de zwaartekracht negatieve arbeid, in het tweede geval verricht de zwaartekracht positieve arbeid. Dit zal vertaald worden in het winnen of verliezen van energie.

### Eenheden voor arbeid en vermogen

Net als kracht, gaat arbeid zo'n belangrijke rol spelen dat de eenheid een eigen naam heeft gekregen, namelijk *Joule* (J),

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2.$$

Belangrijk is ook de arbeid per tijdseenheid, de grootheid  $P = dW/dt$ . Dit wordt *vermogen* (Engels: power) genoemd en de eenheid is *Watt* (W),

$$1 \text{ W} = 1 \text{ N m/s} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^3.$$

### Energie

In principe wordt bij een verplaatsing t.g.v. een uitgeoefende kracht in de richting van de kracht positieve arbeid verricht. In de vorige paragraaf hebben we al gezien dat  $W = \Delta K$ , de verrichte arbeid geeft een verandering van kinetische energie. Voor een aantal speciale krachten, de zogenaamde *conservatieve* krachten genoemd, kunnen we hier iets moois mee doen. Als het niet uitmaakt welke weg we van de ene

naar de andere plaats nemen kunnen we arbeid vertalen in een verschil van potentiële energie tussen  $\mathbf{r}_1$  naar  $\mathbf{r}_2$ . Potentiële energie definiëren we als arbeid verricht door een kracht gaande van een bepaald punt naar een referentiepunt  $\mathbf{r}_0$ ,

$$U(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (49)$$

We krijgen dan dat

$$\Delta U = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1), \quad (50)$$

en we vinden dus  $W = -\Delta U$ , wat gecombineerd met  $W = \Delta K$  betekent dat  $\Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = 0$  of anders geformuleerd dat  $E = K + U$ ,

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(\mathbf{r}), \quad (51)$$

behouden is ( $\Delta E = 0$ ), *behoud van energie*. De eenheid van deze grootheid is (net als voor arbeid) de Joule (J).

We zien hier een belangrijke relatie met symmetriën. De energie van een systeem is alleen behouden als de kracht onafhankelijk is van de tijd. Deze link tussen *invariantie onder tijdschiftingen* en *behoud van energie* blijkt een fundamenteel verband in de fysische wereld van allergrootste tot allerkleinste schalen.

## Conservatieve krachten

De voorwaarde dat we met potentiële energie kunnen werken is dat de berekening van  $U$  en  $\Delta U$  onafhankelijk is van de weg tussen twee punten. Dergelijke krachten heten *conservatief*. Laten we dit eerst voor situaties doen waar maar een dimensie van belang is. We zien dat in ieder geval krachten die geschreven kunnen worden als een afgeleide van een potentiaal functie conservatieve krachten zijn, om precies te zijn:

$$F_x = - \frac{dU}{dx} \quad \iff \quad U(x_1) = - \int_{x_0}^{x_1} F_x dx. \quad (52)$$

( $U$  is de primitieve van  $F_x$ ). Voorbeelden zijn

- Gravitatiekracht aan aardoppervlak (met  $z = 0$  als referentiepunt):

$$F(z) = -mg \quad \iff \quad U(z) = mg z. \quad (53)$$

- Kracht uitgeoefend door veer (met  $x = 0$  als referentiepunt):

$$F(x) = -kx \quad \iff \quad U(x) = \frac{1}{2} k x^2. \quad (54)$$

In drie dimensies zijn krachten die geschreven kunnen worden als de gradiënt van een potentiaal functie conservatief,

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) = \left( -\frac{dU}{dx}, -\frac{dU}{dy}, -\frac{dU}{dz} \right). \quad (55)$$

Een voorbeeld in drie dimensies is de gravitatiekracht tussen twee massa's,

$$F(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \iff \quad U(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (56)$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \quad \text{of} \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Potentiaal functies langs een lijn  $U(x)$  of als functie van de positie in een vlak of de driedimensionale ruimte  $U(\mathbf{r})$  zijn intuïtief heel bruikbaar. De kracht is gerelateerd aan de afgeleide en des te groter naarmate de afgeleide groter is. We kunnen het potentiaalveld zien als een berglandschap waar voorwerpen naar het laagste punt vallen. De kracht is in dat multi-dimensionele landschap zo gericht dat de afname van de potentiaal functie maximaal is.

### 4.3 Behoud van energie

De som van kinetische en potentiële energie, ook wel de totale *mechanische energie* van een systeem genoemd is behouden wanneer er geen 'verdere' externe krachten op dat systeem werken. Let wel op wat als 'verdere' externe krachten moeten worden beschouwd. Bijvoorbeeld, als we een systeem in een gravitatieveld bekijken en de gravitationele potentiële energie  $U(z) = mgz$  meenemen, dan hebben de arbeid t.g.v. de gravitatiekracht al meegenomen.

Naast de mechanische energie kan er op allerlei andere manieren energie aanwezig zijn in het systeem, zoals thermische energie, chemische energie. Deze dragen allemaal bij aan de *totale energie van een systeem*. Als we voldoende van een systeem weten zijn de bijdragen vaak voor een deel weer terug te voeren op mechanische energie. Bijvoorbeeld bij verhitting van een systeem bestaande uit afzonderlijke moleculen, correspondeert de toename van de kinetische energie van de moleculen met een verhoging van de temperatuur en een toename van de thermische energie (de energiever verschillen heten hier *warmte*). Een tweede voorbeeld is het aanslaan of exciteren van atomen of moleculen. Afhankelijk van de banen van de elektronen in een atoom hebben deze een bepaalde kinetische en potentiële energie, die bijdragen aan de totale energie van het hele atoom. Binding tussen atomen in moleculen is een vorm van potentiële energie.

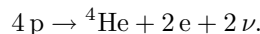
De totale energie van een systeem dat als geheel in rust is, is op een factor  $c^2$  na, niets anders dan de massa van dat systeem:

$$M = \frac{E_{\text{tot}}(\text{rust})}{c^2} \quad \text{of} \quad E_{\text{tot}}(\text{rust}) = M c^2. \quad (57)$$

Het blijkt die totale rustenergie (waar die ook uit opgebouwd is) te zijn die via bovenstaande vergelijking zowel de traagheid van het systeem bepaalt, als ook het effect in een gravitatieveld van een andere massa (equivalentieprincipe). Wanneer er processen optreden waarbij de massa's van de deeltjes voor en na het proces veranderen, dan moet het massaverschil voor en na het proces meegenomen worden in de energiebalans. Voor een (al dan niet samengesteld) bewegend object met massa  $m$  is de som van interne energie en kinetische energie gelijk aan

$$E = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad (58)$$

(de relativistische uitdrukking zullen we later bespreken). Voorbeelden waarbij de rustenergie belangrijk is zijn kernreacties, zoals het belangrijkste kernfusieproces op de Zon, de omzetting van 4 Waterstofatoomkernen in een Helium atoomkern, 2 positronen (antideeltjes van elektronen) en 2 neutrino's,



Als er op een bepaald systeem een externe kracht werkt dan zal de energie wel veranderen, en wel met een bedrag gelijk aan de verrichte arbeid. Vanwege het actie = -reactie principe is de energiewinst (of verlies) van het systeem gelijk aan het energieverlies (of winst) van het systeem waar de externe kracht vandaan komt. Voor conservatieve krachten kan de arbeid verrekend worden via de potentiële energie. Dat kan niet in andere gevallen zoals bij wrijvingskrachten of snelheidsafhankelijke krachten. Hier zien we bijvoorbeeld dat de wrijving negatieve arbeid verricht, d.w.z. energie uit een systeem haalt (bijvoorbeeld vermindering van kinetische energie). Uiteindelijk komt die energie dan wel weer ergens terecht, bijvoorbeeld in de vorm van warmte in het voorwerp, de vloeistof of het gas. Op het gecombineerde systeem van bijvoorbeeld een schuivend blok + oppervlakte werkt namelijk geen netto kracht, dus is de totale energie behouden. Hetzelfde geldt voor scharnieren, flexibele verbindingen (denk aan spieren) of aandrijvingsassen. In principe is er energieoverdracht en geen verlies. Als er al verlies is door wrijving blijft die in het systeem (omzetting in thermische energie meestal merkbaar als verhitting). Het ultieme afgesloten systeem met daarin behoud van energie is het heelal.

Gebruikmakend van behoud van energie (soms gecombineerd met behoud van impuls wat aan de orde komt in volgende hoofdstuk) kunnen we een heleboel problemen sneller en eenvoudiger oplossen dan door de volledige beweging te berekenen met de wetten van Newton.

## 5 Behoud van impuls en rol van het zwaartepunt

### 5.1 Stoot en behoud van impuls

Wanneer een voorwerp geen kracht ondervindt, voert dat voorwerp een eenparige beweging uit. De tweede wet van Newton wat er gebeurt als er een kracht werkt, namelijk de grootte  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$  verandert. Deze grootte heet *hoeveelheid van beweging* of kortweg de *impuls* (Engels: momentum). De verandering wordt gegeven door

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \text{of} \quad \mathbf{F} dt = d\mathbf{p} \quad (59)$$

De grootte in de tweede vergelijking wordt de *stoot* (Engels: impulse) genoemd. Deze veroorzaakt een verandering van de impuls.

De infinitesimale relatie kan natuurlijk uitgebreid worden tot eindige verschillen, waarbij we in de gevallen dat de kracht niet constant is, in het algemeen zullen moeten integreren. Voor de verandering van de impuls is de *stoot*  $I$  verantwoordelijk. Vergelijking 59 wordt een integraal,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F}(t) = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1, \quad (60)$$

waar  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(t_2)$  en  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t_1)$ . Voor een constante kracht wordt dit  $I = \mathbf{F} \Delta t = \Delta(m\mathbf{v})$ .

Wanneer we een systeem hebben waarop geen externe krachten werken, dan beweegt het gehele systeem zich eenparig, maar de posities binnen het geheel kunnen nog wel veranderen. Wat dit betekent is eenvoudig te zien door alle op de onderdelen op te tellen,

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \quad (61)$$

Wanneer er geen externe krachten zijn is  $\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{0}$ , omdat alle interne krachten in paren komen die elkaar opheffen (actie = - reactie). Dit geeft aanleiding tot behoud van (totale) impuls. De grootte

$$\mathbf{P}_{\text{tot}} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \quad (62)$$

(totale impuls) is behouden, d.w.z. verandert niet in de tijd. We zullen dit gebruiken bij botsingen en om het zwaartepunt van een systeem te vinden.

### 5.2 Botsingen in één dimensie

Relatief eenvoudig is behoud van impuls als we ons beperken tot botsingen één dimensie (langs een lijn). Behoud van impuls voor twee botsende objecten (met alleen krachten op elkaar en geen externe krachten) betekent

$$P_{\text{tot}} = m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (63)$$

waar de snelheden positief of negatief kunnen zijn (richting is belangrijk). We kunnen dit herschrijven tot  $m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$ . Een bijzonder geval is als de twee objecten 'plakken', d.w.z.  $v_2' = v_1' = v'$ . We zien dat als we de totale impuls  $P$  hebben uitgerekend, dat we dan de snelheid na de botsing vinden als  $v' = P_{\text{tot}}/(m_1 + m_2)$ .

De kinetische energie kan bij een botsing behouden zijn, maar dat hoeft niet. In het algemeen schrijven we

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + Q,$$

waarbij energie kan vrijkomen ( $Q > 0$ ) of geabsorbeerd worden ( $Q < 0$ ). Als de totale kinetische energie niet verandert ( $Q = 0$ ), hebben we het bijzondere geval van een *elastische* botsing, wat samen met impulsbehoud de relatie  $v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$  oplevert of in termen van relatieve snelheden,

$$v' = v_1' - v_2' = v_2 - v_1 = -v.$$

De relatieve snelheden voor en na de botsing zijn dus even groot (maar tegensteld van richting). De verhouding van de relatieve snelheden is een maat voor de elasticiteit. Een *volledig inelastische* botsing krijgen we als  $v' = 0$  (plakken). We zullen straks zien wat er met de kinetische energie van het systeem gebeurt. In ieder geval weten we uit vgl. 43 dat er dan sprake is van arbeid.

### 5.3 Het zwaartepunt

Gebruikmakend van de totale massa  $M$  introduceren we een speciale coördinaat, het zwaartepunt (Engels: center of mass) ,

$$M = \sum_i m_i, \quad (64)$$

$$M \mathbf{R}_{\text{cm}} \equiv \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad \text{of (expliciet)} \quad \begin{cases} M X_{\text{cm}} = \sum_i m_i x_i \\ M Y_{\text{cm}} = \sum_i m_i y_i \\ M Z_{\text{cm}} = \sum_i m_i z_i \end{cases} \quad (65)$$

en krijgen we voor de totale kracht in vgl. 61

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = M \ddot{\mathbf{R}}_{\text{cm}} = M \dot{\mathbf{V}}_{\text{cm}} = M \mathbf{A}_{\text{cm}} = \frac{d\mathbf{P}_{\text{tot}}}{dt}. \quad (66)$$

waar

$$\mathbf{P}_{\text{tot}} = M \mathbf{V}_{\text{cm}} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \quad (67)$$

de totale impuls van het systeem (vgl. 62) is.

Het gehele systeem kan dus voor externe krachten beschouwd worden als één punt met positie  $\mathbf{R}_{\text{cm}}$  en massa  $M$  en impuls  $M \mathbf{V}_{\text{cm}}$ . In afwezigheid van externe krachten,  $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$  is deze totaalimpuls behouden, d.w.z. een constante vector (zowel wat grootte als richting betreft). Het zwaartepunt beweegt dan eenparig,  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_{\text{cm}} t$ .

### Berekening van het zwaartepunt

We hebben al gezien dat de keuze van referentiesysteem niet uitmaakt voor de beschrijving van de beweging. Maar de berekening in het ene systeem kan wel een stuk eenvoudiger zijn. Een speciaal systeem is het zwaartepuntsysteem, waarbij het zwaartepunt in rust is. Zeker in het geval dat er geen externe krachten zijn (of zoals we zullen zien een constante externe kracht) kunnen we eerst alles wat met de interne dynamica van het systeem te maken hebben eerst uitrekenen en ons dan pas bekommeren om de beweging van het geheel (eenparig bij afwezigheid van een externe kracht).

Voor het berekenen van het zwaartepunt zijn vgl. 64 en 65 het uitgangspunt. Enig nadenken kan bij de berekening wel veel werk schelen. Als het systeem uit meerdere uitgebreide objecten bestaat, kunnen we bijvoorbeeld eerst voor elk gewenst onderdeel het eigen zwaartepunt en sommassa bepalen en die onderdelen daarna verder combineren. Ook kunnen we gebruik maken van de symmetrie van een object. Zo zal voor een uniforme spherische verdeling van massapunten het zwaartepunt in het middelpunt liggen. Bij een driehoek met drie gelijke massa's is het zwaartepunt precies wat we in de wiskunde als zwaartepunt hebben afgesproken (snijpunt van lijnen die hoekpunten met midden van de tegenoverliggende zijde verbinden, ga dit na!). Voor een samenstel van een zwaar en een licht object zal het zwaartepunt het dichtst bij het zware object liggen, bijvoorbeeld voor het systeem Aarde-Maan. Het is overigens het zwaartepunt van het Aarde-Maan systeem dat een (ellips)baan om de Zon beschrijft. Aarde en Maan draaien weer om hun gemeenschappelijke zwaartepunt als een soort halter.

Voor een uitgebreid systeem hangt de positie van het zwaartepunt af van de dichtheid  $\rho(\mathbf{r})$  en moeten we integreren. De integratiemaat  $d^3m$  is de massa in een volumemaat  $d^3r$ , dus het volume vermenigvuldigd met de dichtheid,

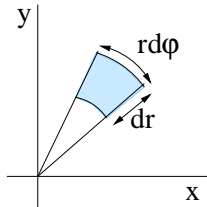
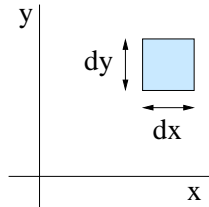
$$M = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) = \int d^3m \quad (68)$$

$$M \mathbf{R}_{\text{cm}} = \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \int d^3m \mathbf{r} \quad \text{of (expliciet)} \quad \begin{cases} M X_{\text{cm}} = \int d^3r x \rho(\mathbf{r}) \\ M Y_{\text{cm}} = \int d^3r y \rho(\mathbf{r}) \\ M Z_{\text{cm}} = \int d^3r z \rho(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (69)$$

In het uitvoeren van de integralen is de symmetrie en de keuze van de juiste integratievariabelen belangrijk.

### Integreren in twee dimensies

Om het zwaartepunt van uitgebreide systemen te vinden met spherische symmetrie is het vaak handig om gebruik te maken van poolcoördinaten. Voor integraties over een oppervlakte (bijvoorbeeld in het geval van een schijf) kunnen we zowel i.p.v. Cartesische coördinaten  $x$  en  $y$  beter poolcoördinaten  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  en  $\varphi$  gebruiken.



Gebruikmakend van de relaties (vergelijking 12) tussen  $(x, y)$  en  $(r, \varphi)$  of uit de figuur, zien we dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x, y) = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi r \tilde{f}(r, \varphi), \quad (70)$$

waar  $\tilde{f}(r, \varphi) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ .

### Integreren in drie dimensies

Net als in twee dimensies kunnen we aan de hand van een volume element bestuderen of met behulp van elementaire wiskundige technieken (gebruikmaking van een Jacobiaan) nagaan hoe integraties in poolcoördinaten gedaan kunnen worden. Het resultaat gebruikmakend van de coördinaten  $r$ ,  $\theta$  en  $\varphi$  (zie vgl. 27) is

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz f(x, y, z) &= \int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta \tilde{f}(r, \theta, \varphi) \\ &= \int_0^{\infty} dr \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \tilde{f}(r, \theta, \varphi) \end{aligned} \quad (71)$$

waar  $\tilde{f}(r, \theta, \varphi) = f(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi))$ .

In geval van cilindersymmetrie is de driedimensionale integraal een rechtstreekse uitbreiding van de poolcoördinaten in twee dimensies. De coördinaten zijn dan  $b = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi$  en  $z$  en de integratie wordt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} b db \int_0^{2\pi} d\varphi \tilde{f}(b, \varphi, z) \quad (72)$$

waar  $\tilde{f}(b, \varphi, z) = f(x(b, \varphi), y(b, \varphi), z)$ .

## 5.4 Relatieve en zwaartepuntcoördinaten

Voor twee deeltjes met coördinaten  $\mathbf{r}_1$  en  $\mathbf{r}_2$  respectievelijk, worden de coördinaten in het zwaartepuntstelsel

$$\mathbf{r}_{\text{cm}1} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \frac{m_2}{M} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \quad (73)$$

$$\mathbf{r}_{\text{cm}2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = -\frac{m_1}{M} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\frac{m_1}{M} \mathbf{r}. \quad (74)$$

waar  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  de relatieve coördinaat is. Merk op dat voor de coördinaten in het zwaartepuntstelsel geldt  $\sum_i m_i \mathbf{r}_{\text{cm}i} = 0$ .

We hebben dus zoiets als twee nieuwe coördinaten  $\mathbf{R}$  en  $\mathbf{r}$ . Als notatie zullen we soms ook  $\mathbf{R}_{12}$  gebruiken of  $\mathbf{r}_{12}$ . De transformatie tussen deze coördinaten is

$$\left. \begin{aligned} M \mathbf{R} &= m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \end{aligned} \right. \quad (75)$$

Wanneer we naast de totale impuls de relatieve impuls relateren aan de tijdsafgeleide van  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p} \equiv m\dot{\mathbf{r}}$ , vinden we de transformatie

$$\left. \begin{aligned}
 MV = M\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\
 \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{m_2}
 \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned}
 \mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{V} + \frac{m_1 m_2}{M} \mathbf{v} = \frac{m_1}{M} \mathbf{P} + \mathbf{p} \\
 \mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{V} - \frac{m_1 m_2}{M} \mathbf{v} = \frac{m_2}{M} \mathbf{P} - \mathbf{p}
 \end{aligned} \right. \quad (76)$$

waar

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} \quad \text{met} \quad m = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (77)$$

de relatieve impuls  $\mathbf{p}$  en gereduceerde massa  $m$  zijn. Het is eenvoudig te laten zien dat de kinetische energie geschreven kan worden als

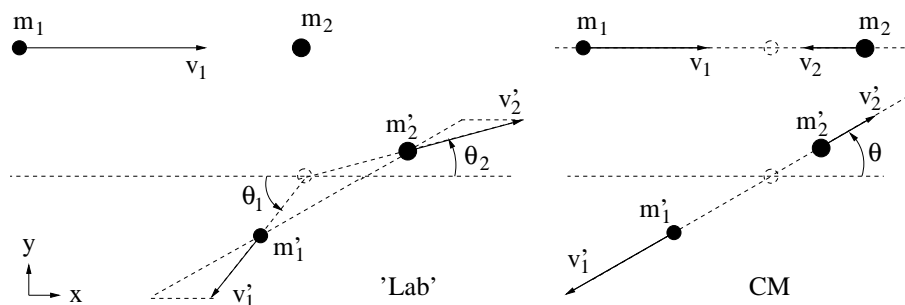
$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \\
 &= \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}.
 \end{aligned} \quad (78)$$

Wanneer er alleen interne krachten zijn hangt de potentiële energie van het systeem alleen van de relatieve afstand,  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r})$ . Deze coördinaat verandert niet onder translaties (invariantie onder translaties of translatiesymmetrie).

Het verband tussen *invariantie onder ruimte-translaties* en *behoud van totale impuls* blijkt een fundamentele eigenschap voor alle krachten in de natuur te zijn.

## 5.5 \*Botsingen in meer dimensies

Bij botsingen van twee objecten waarbij alleen onderlinge krachten een rol spelen, is het behoud van impuls het belangrijkste uitgangspunt, er is namelijk geen netto kracht. Vaak is het gebruik van relatieve en zwaartepuntscoördinaten een uitkomst. We schetsen de beweging van twee botsende deeltjes in onderstaande figuur. Geschetst zijn hieronder de beweging van twee botsende deeltjes voor (bovenste figuren) en na (onderste figuren) de botsing gezien vanuit het referentiesysteem waar deeltje 2 voor de botsing in rust is (linkerfiguren, label 'Lab') en vanuit het zwaartepuntsysteem (rechterfiguren, label 'CM'). De situatie is geldig voor het botsen van twee macroscopische systemen, waarbij de eindsituatie de massa's niet veranderd zullen zijn, maar beschrijft ook een botsing waarbij een of twee massa's veranderen, bijvoorbeeld de botsing van een elektron met een atoom, waarbij het atoom wordt aangeslagen (en dan een andere massa krijgt) of de botsing van twee subatomaire deeltjes, waarbij twee nieuwe deeltjes ontstaan. We zullen in deze behandeling wel aannemen dat alle snelheden niet-relativistisch (d.w.z.  $v \ll c$ ) zijn.



In de figuur linksboven<sup>7</sup> is de snelheid van het zwaartepunt  $M\mathbf{V} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$ . Deze snelheid is om de figuur rechtsboven te krijgen van  $\mathbf{v}_1$  en  $\mathbf{v}_2$  afgetrokken. Dan vinden we tegengestelde snelheden met als verschil nog steeds de relatieve snelheid  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{\text{cm}1} &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} = \frac{m_2}{M} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \frac{m_2}{M} \mathbf{v} \\
 \mathbf{v}_{\text{cm}2} &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{V} = -\frac{m_1}{M} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = -\frac{m_1}{M} \mathbf{v}
 \end{aligned}$$

<sup>7</sup>in de figuur links is de snelheid  $\mathbf{v}_2$  nul, maar in de behandeling is  $\mathbf{v}_2$  gewoon meegenomen.

en zoals al gezegd  $\mathbf{v}_{\text{cm}1} - \mathbf{v}_{\text{cm}2} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ . De energie in het zwaartepuntsysteem is

$$E_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m v^2,$$

waar  $m = m_1 m_2 / M$  de gereduceerde massa is. De situatie na de botsing is het gemakkelijkst te vinden in het zwaartepuntsysteem. We hebben weer tegengestelde impuls voor 1 en 2, waarvan zoals hierboven besproken de massa's veranderd kunnen zijn. Het verschil van de snelheden is weer hetzelfde in beide (beter alle) referentiesystemen,  $\mathbf{v}'_{\text{cm}1} - \mathbf{v}'_{\text{cm}2} = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}'$ . De energie na de botsing is

$$E'_{\text{cm}} = E_{\text{cm}} + Q = \frac{1}{2} m' v'^2, \quad (79)$$

waar  $m' = m'_1 m'_2 / M'$ . Om de verandering in de energie in het zwaartepuntsysteem te schrijven hebben we  $Q$  geïntroduceerd waar sprake is van vrijkomende energie ( $Q > 0$ ) bij een *exotherm* proces en van energieabsorptie ( $Q < 0$ ) bij een *endotherm* proces. De grootheid  $Q$  bevat in feite  $Q = m_1 c^2 + m_2 c^2 - m'_1 c^2 - m'_2 c^2 = (M - M') c^2$ . Werken met  $Q$  kan dus naast de gevallen waarin er sprake is van verlies t.g.v. warmteontwikkeling, wrijving of het aanslaan van atomen, ook als er bijvoorbeeld materie van 1 naar 2 wordt overgedragen, zoals in chemische of biologische processen of als er massa wordt omgezet in energie. Als er grote snelheden (bijvoorbeeld bij fotonen) of als er substantiële omzetting van massa in energie of omgekeerd plaatsvindt (bijvoorbeeld bij kernreacties), moeten we een relativistische behandeling kiezen. In het geval dat de botsende deeltjes helemaal niet veranderen, ( $m'_1 = m_1$  en  $m'_2 = m_2$ ) zien we dat we via het verschil van de snelheden en de verandering daarvan ook meteen iets kunnen zeggen over verandering van energie. I.h.b. wanneer  $E'_{\text{cm}} = E_{\text{cm}}$  (geen energieverlies of *elastische verstrooiing*) zijn de verschillen voor en na de botsing gelijk. Als de verschilsnelheid in de eindtoestand nul (objecten blijven aan elkaar zitten) hebben we  $E'_{\text{cm}} = 0$  (volledig inelastische verstrooiing).

Om het verstrooiingsproces verder te karakteriseren worden meestal hoeken gebruikt (we zullen ook hier niet-relativistisch werken en identieke massa's voor en na de botsing gebruiken). In het zwaartepuntsysteem is het evident dat elke hoek in principe mogelijk is. De daadwerkelijke hoek kan van allerlei zaken afhangen, zoals de vorm van de botsende objecten of de onderlinge krachten. Het meten van de hoekafhankelijkheid is daarom meestal ook het doel van het doen van botsingsprocessen. Om de verstrooiingshoeken  $\theta_1$  en  $\theta_2$  te vinden gebruiken we expliciete coördinaten  $x$  en  $y$  (aangegeven in de figuur). Werkend met impuls weten we dat in het zwaartepuntsysteem  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{cm}2} = -\mathbf{p}_{\text{cm}1}$ , wat in de situatie na de botsing geldt voor zowel de  $x$ - als  $y$ -coördinaat van  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_{\text{cm}2} = -\mathbf{p}'_{\text{cm}1}$ . Om van het zwaartepunt naar het originele referentiesysteem te gaan gebruiken we de snelheid  $V$  (gekozen in de  $x$ -richting en berekend uit de situatie voor de botsing). We hebben dan

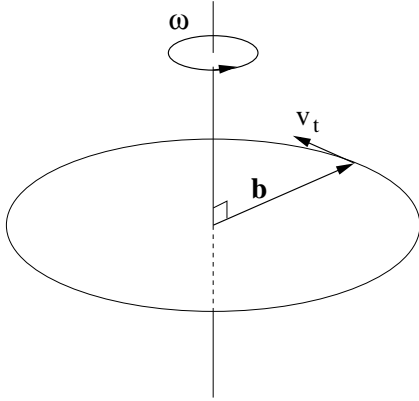
$$\begin{aligned} p'_{2y} &= p'_y & \text{en} & & p'_{2x} &= p'_x + m'_2 V, \\ p'_{1y} &= -p'_y & \text{en} & & p'_{1x} &= -p'_x + m'_1 V, \end{aligned}$$

waaruit we  $\tan \theta_2 = p'_{2y} / p'_{2x}$  en  $\tan \theta_1 = p'_{1y} / p'_{1x}$  berekenen voor gegeven  $\tan \theta = p'_y / p'_x$ .

## 6 Rotaties en behoud van impulsmoment

### 6.1 Kinetische energie van roterend systeem

Rotaties in drie dimensies worden gekenmerkt door een rotatieas. De beweging ten gevolge van die rotatie vindt plaats in vlakken die loodrecht op die as staan. We herhalen even de kenmerkende begrippen voor de beweging in het rotatievlak, waarbij we het snijpunt met de rotatieas als oorsprong kiezen en werken met afstand  $b$  en hoek  $\varphi$ :



hoeksnelheid:	$\omega = \dot{\varphi}$ ,
hoekversnelling:	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ ,
tangentiële snelheid:	$v_t = \omega b$ ,
tangentiële versnelling:	$a_t = \alpha b$ ,
centripetale versnelling:	$a_c = \omega^2 b = v_t^2/b$ ,

Om een uitdrukking voor de kinetische energie van een roterend systeem te vinden gaan we uit van een vaste rotatieas. We zien dat de kinetische energie gelijk is aan

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{b}_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (80)$$

waar  $\mathbf{b}_i$  de positie vector in het rotatievlak is met als lengte de afstand van de massa  $m_i$  tot de as; dus als we rotaties om de  $z$ -as bekijken dan is  $b_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ . De grootte  $I$  heet het *traagheidsmoment* (Engels: moment of inertia) rond de rotatieas,

$$I = \sum_i m_i b_i^2, \quad (81)$$

Voor een uitgebreid systeem met massaverdeling  $\rho(\mathbf{r})$  wordt dit

$$I = \int d^3r (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) = \int dz b^3 db d\varphi \rho(b, \varphi, z). \quad (82)$$

We merken op dat het traagheidsmoment afhangt van de rotatieas. Voorbeelden van traagheidsmomenten zijn:

$$\text{homogene bol (straal } R, \text{ as door middelpunt): } I = \frac{2}{5} MR^2, \quad (83)$$

$$\text{holle bol (straal } R, \text{ as door middelpunt): } I = \frac{2}{3} MR^2, \quad (84)$$

$$\text{staaf (lengte } L, \text{ as door middelpunt loodrecht op staaf): } I = \frac{1}{12} ML^2, \quad (85)$$

$$\text{staaf (lengte } L, \text{ as door eindpunt loodrecht op staaf): } I = \frac{1}{3} ML^2, \quad (86)$$

Het traagheidsmoment t.o.v. een as door het zwaartepunt wordt meestal bedoeld als we praten over *het* traagheidsmoment van een object. Er zijn dan natuurlijk nog meerdere traagheidsmomenten afhankelijk van de richting van die as. Uitgaande van een van die assen door het zwaartepunt kunnen we voor alle assen parallel daaraan op afstand  $h$  het traagheidsmoment vinden via

$$\begin{aligned} I_h = \sum_i m_i (\mathbf{b}_i + \mathbf{h})^2 &= \sum_i m_i \mathbf{b}_i^2 + \mathbf{h} \cdot \left( \sum_i m_i \mathbf{b}_i \right) + \mathbf{h}^2 \sum_i m_i \\ &= I_{\text{cm}} + M h^2, \end{aligned} \quad (87)$$

waar de tweede term in de laatste uitdrukking in eerste regel nul is omdat de  $\mathbf{b}_i$  gewogen met massa's  $m_i$  juist het zwaartepunt in het rotatievlak geven, wat we als oorsprong hadden genomen.

Gecombineerd met een beweging van het zwaartepunt vinden we voor de kinetische energie van een eenparig bewegend roterend object op dezelfde wijze,

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}_i)^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2. \quad (88)$$

## 6.2 Krachtmoment en behoud van impulsmoment

We beginnen weer met de rotatie die zich in een vlak afspeelt. We hebben al eerder gezien dat een cirkelbeweging altijd een versnelde beweging is met een naar het middelpunt van de cirkel gerichte versnelling  $a_c$ . Er is dus altijd een radiële kracht nodig (bv. spankracht of gravitatiekracht) om een object in een cirkelbaan te houden. De grootte van de (naar het centrum gerichte) centripetale kracht is

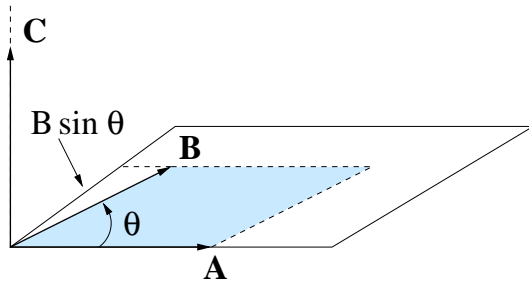
$$F_c = m a_c = m \omega^2 b = \frac{m v_t^2}{b}. \quad (89)$$

Er kan ook nog een kracht langs de baan zijn die dan de tangentiële versnelling oplevert,

$$F_t = m a_t = m b \alpha = m b \frac{d\omega}{dt}.$$

### Uitproduct van vectoren

Rotaties worden gekenmerkt door een rotatievlak. Zo'n vlak wordt in drie dimensies ook vastgelegd wanneer we de vector loodrecht op het vlak geven. In drie dimensies wordt daarbij veelvuldig gebruik gemaakt van het *uitproduct* (Engels: vector product) van vectoren.



Het uitproduct van twee vectoren  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \quad (90)$$

is een vector  $\mathbf{C}$  die loodrecht op  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$  staat (en dus ook op het vlak waarin  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$  liggen). De richting t.o.v. het vlak wordt bepaald met de kurketrekkerregel. De lengte van de vector is

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta, \quad (91)$$

waar  $\theta$  de hoek tussen  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$  is. We merken op dat  $|\mathbf{B}| \sin \theta$  precies de grootte van de projectie op de richting loodrecht op  $\mathbf{A}$  is. De grootte van het uitproduct is dus precies het oppervlak van het parallellogram opgespannen door  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$  of tweemaal het oppervlak van de driehoek waarvan  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$  de zijden vormen. Het uitproduct heeft een aantal eigenschappen zoals

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \quad (92)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0, \quad (93)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}, \quad (94)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (95)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B}, \quad (96)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} \right) + \left( \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right). \quad (97)$$

Uitdrukkingen gebruikmakend van coördinaten kunnen we gemakkelijk vinden door gebruik te maken van de lineariteit van het uitproduct, de expansie  $\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$  en de basiseigenschappen  $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$ , etc. (cyclisch verwisselen). Voor  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  vinden we

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x. \quad (98)$$

Hieruit zien we dat de hoekversnelling tengevolge van de tangentiële kracht gegeven wordt door

$$\alpha = \frac{F_t}{mb} = \frac{bF_t}{I} = \frac{\tau}{I} \quad \text{of} \quad \tau = I\alpha. \quad (99)$$

De grootte  $\tau = bF_t$  heeft een speciale naam, het illustreert hoe een hoekversnelling bij een object met een traagheidsmoment  $I$  bepaald wordt door *arm*×*kracht*, bekend als het krachtmoment (Engels: torque). Vergelijking 99 is de analogie van Newton in het geval van rotaties.

Welke arbeid verrichten deze krachten. De centripetale kracht staat loodrecht op de verplaatsing, dus verricht bij een cirkelbaan geen arbeid<sup>8</sup>. Een tangentiële kracht verricht wel arbeid, welke precies ten goede komt aan de in de vorige paragraaf berekende kinetische energie. In een tijd  $dt$  is de verplaatsing gelijk aan  $b d\phi = b\omega dt$

$$dW = F_t b d\phi = \tau d\phi = \tau \omega dt \quad (100)$$

Dit kunnen we herschrijven als

$$\tau \omega = I \frac{d\omega}{dt} \omega = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I \omega^2 \right),$$

waaruit we zien dat arbeid ten goede komt aan de kinetische energie van het roterende object.

Het krachtmoment kunnen we algemener behandelen als vectorgrootte. We hebben behoud van energie en impuls gevonden door te zoeken naar grootheden die veranderen als er krachten worden uitgeoefend op een object, om precies te zijn in hoofdstuk 4 hebben we gekeken naar  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  en in hoofdstuk 5 naar  $\mathbf{F}$  zelf. Voor rotaties beschouwen we de krachtcomponent loodrecht op  $\mathbf{r}$  waarvoor we het uitproduct gebruiken,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = m \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = m \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt}, \quad (101)$$

waar het *impulsmoment* (Engels: angular momentum) gegeven wordt door

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (102)$$

De linkerkant staat bekend als het *krachtmoment* (Engels: torque)  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , nu netjes als vectorgrootte.

Voor een voorwerp bestaande uit componenten, krijgen we

$$\mathbf{L} = \sum_i \boldsymbol{\ell}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad (103)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{net}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (104)$$

d.w.z. voor het gecombineerde systeem hebben we *behoud van totaal impulsmoment*  $\mathbf{L}$  als het netto krachtmoment nul is. Dit is bijvoorbeeld het geval als er alleen onderlinge krachten zijn, bijvoorbeeld het zonnestelsel of een vrij bewegend atoom of molecuul. We merken op dat in principe bovenstaande uitdrukkingen afhangen van de keuze van de oorsprong, maar dat geldt voor linkerkant *en* rechterkant van de vergelijkingen.

Het ontbreken van krachtmoment en behoud van impulsmoment heeft een fundamentele relatie met rotatiesymmetrie. Bijvoorbeeld de Aarde bevindt zich in het zwaartekrachtveld van de Zon. Maar de kracht is langs de Aarde-Zon lijn gericht. Dus met de Zon als oorsprong (of t.o.v. het zwaartepunt Aarde-Zon) zien we dat het krachtmoment nul is (uitproduct van parallelle vectoren) en het impulsmoment van het systeem Aarde-Zon is dus behouden. We kunnen ook kijken naar de potentiaalfunctie, waarvan de kracht is afgeleid (zie vgl. 55). Dat is in rotatie-symmetrische situaties een *centrale potentiaal*,  $U(\mathbf{r}) = U_c(r)$ , die alleen afhangt van de grootte van de onderlinge afstand. De kracht

$$\mathbf{F} = -\nabla U_c(r) = -\frac{1}{r} \frac{dU_c}{dr} \hat{\mathbf{r}}. \quad (105)$$

is dan radiëel en het bijbehorende krachtmoment is nul.

Dit illustreert het fundamentele verband tussen *rotatiesymmetrie* en *behoud van impulsmoment*.

<sup>8</sup>Arbeid wordt er wel verricht als de massa naar binnen of buiten wordt bewogen.

### 6.3 \*Rotatiesnelheid als vectorgrootte en impulsmoment

We kijken naar de snelheden van een star (samenhangend) roterend systeem. T.o.v. een oorsprong ergens op de rotatieas hebben we

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \quad (106)$$

waar  $\boldsymbol{\omega}$  een vector is met de hoeksnelheid  $\omega$  als lengte en de rotatie-as als richting (met positief/negatief bepaald via de kurketrekkerregel). Het is eenvoudig na te gaan dat de grootte van de snelheid gevonden wordt als het product van  $\omega$  en de afstand  $b_i$  tot de as en de tangentiële richting staat loodrecht op de rotatieas en  $\mathbf{r}_i$ . De algemene uitdrukking voor het impulsmoment van het hele systeem is

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i). \quad (107)$$

Expliciet in componenten hebben we

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} -\omega y_i \\ \omega x_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \begin{pmatrix} -\omega x_i z_i \\ -\omega y_i z_i \\ \omega(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}.$$

Als het systeem symmetrisch is om de z-as is er voor iedere positieve  $x_i$  een  $-x_i$  bijdrage in de som en idem voor  $y_i$ , dus de eerste twee componenten zullen na sommatie nul geven. We hebben dan

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}, \quad (108)$$

waar  $I$  het in paragraaf 6.1 besproken traagheidsmoment is. Het resultaat laat zien dat voor een mooi symmetrisch systeem behoud van impuls kan corresponderen met een uniform roterend systeem. Voor een niet-symmetrisch systeem moeten we terug naar vgl. 107, de situatie is ingewikkelder en de rotatieas van systeem zal in het algemeen precessies uitvoeren t.o.v. een vaste as in de ruimte. Gebruikmakend van de uitdrukking voor kinetische energie in vgl. 6.1 van een roterend systeem zien we dat uitgedrukt in termen van het impulsmoment

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{\mathbf{L}^2}{2I}. \quad (109)$$

(Vergelijk met  $K = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 = \mathbf{P}^2 / 2M$ .) Verder kunnen we vergelijking 104 schrijven als

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I \dot{\boldsymbol{\omega}} = I \boldsymbol{\alpha}. \quad (110)$$

(Vergelijk met  $\mathbf{F}_{\text{net}} = d\mathbf{P}/dt = M \mathbf{A}$ .)

Om het impulsmoment t.o.v. een willekeurig punt te bepalen is het nuttig om de zwaartepuntcoördinaat af te splitsen,  $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{\text{cm}i}$  en idem voor  $\mathbf{v}_i$ . Omdat  $\sum_i m_i \mathbf{r}_{\text{cm}i} = 0$ , vinden we

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}_{\text{cm}i} \times m_i \mathbf{v}_{\text{cm}i} = \mathbf{L}_{\text{baan}} + \mathbf{L}_{\text{spin}}. \quad (111)$$

Het impulsmoment  $\mathbf{L}_{\text{spin}}$  (ook kortweg spin  $\mathbf{S}$  genoemd) is onafhankelijk van de keuze van oorsprong. Voor een uit twee objecten bestaand systeem is het eenvoudig om te zien dat

$$\mathbf{L}_{\text{spin}} = \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v}, \quad (112)$$

waar  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{v}$  de relatieve coördinaten zijn (vgl. 75).

### 6.4 \*Impulsmoment en quantummechanica

In ons inleidend hoofdstuk hebben we al opgemerkt dat klassieke mechanica niet meer werkt als de schaal van dingen van de orde van grootte van de constante van Planck komt. Dat speelt in het bijzonder een rol voor impulsmomenten. De eenheid van impulsmoment ( $\text{kg m}^2/\text{s} = \text{Js}$ ) is ook de eenheid voor de constante van Planck. We kunnen een impulsmoment dus in principe als een veelvoud van de constante van Planck beschouwen.

Kijken we eerst naar het impulsmoment langs een bepaalde richting (we kiezen voor gemak  $z$ -richting), dan blijkt quantummechanisch baanimpulsmoment alleen als heeltallige veelvoud van  $\hbar = h/2\pi$  voor te komen,

$$\ell_z = m_\ell \hbar \quad \text{met} \quad m_\ell \text{ heeltallig.}$$

Op het meest elementaire niveau blijken deeltjes ook als halftallige veelvoud voor te komen,

$$s_z = m_s \hbar \quad \text{met} \quad m_s \text{ halftallig óf heeltallig.}$$

bijvoorbeeld de spin van een elektron of een quark kunnen een spin  $s_z = \pm\hbar/2$  (de verschillen kunnen alleen heeltallig zijn).

Verder blijken impulsmomenten altijd te precederen, wat ook betekent dat de spin niet strikt langs een as kan liggen. Quantummechanisch blijkt de lengte van baanimpulsmomenten gegeven te worden door

$$\ell^2 = \ell(\ell + 1) \hbar^2 \quad \text{met} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

waarbij de maximale en minimale waarden toegestaan voor  $\ell_z$  de waarden  $m_\ell = \pm\ell$  zijn en alle heeltallige tussenliggende waarden toegestaan zijn. Op dezelfde manier hebben we voor spin

$$\mathbf{s}^2 = s(s + 1) \hbar^2 \quad \text{met} \quad s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$$

weer met voor  $s_z$  maximale en minimale waarden  $m_s = \pm s$  en (in heeltallige stappen) toegestane tussenliggende waarden.

## 7 Continue media

### 7.1 Dichtheid

In continue media zoals vaste stoffen, vloeistoffen of gassen hebben we te maken met een groot aantal, al dan niet vrijbewegende of aaneengeschakelde deeltjes (atomen of moleculen). Een gemeenschappelijke karakteristiek van het systeem is de *dichtheid* (Engels: density),

$$\rho = \frac{M}{V}. \quad (113)$$

Voor water hebben we bijvoorbeeld  $1 \text{ kg/dm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$ , terwijl die voor lucht maar  $1.293 \text{ kg/m}^3$  is. Bovenstaande is natuurlijk de gemiddelde dichtheid, die kan variëren. Gegeven de dichtheid als functie van de positie,  $\rho(\mathbf{r})$  kunnen we de totale massa en het zwaartepunt berekenen door over het volume te integreren,

$$M = \int d^3r \rho(\mathbf{r}), \quad (114)$$

$$M \mathbf{R}_{\text{cm}} = \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}). \quad (115)$$

### 7.2 Evenwicht

Een systeem (voorwerp) blijft in rust (of blijft eenparig bewegen) als de netto kracht nul is. Dan is het nog wel mogelijk dat er elkaar opheffende krachten zijn die een rotatie veroorzaken. Als het krachtmoment van deze krachten nul is gaat een voorwerp ook niet draaien (of het blijft met constante hoeksnelheid doordraaien). De voorwaarden voor *statisch evenwicht* (Engels: static equilibrium) zijn dan ook

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad (116)$$

$$\sum_i \tau_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0. \quad (117)$$

De conditie voor het krachtmoment lijkt afhankelijk van een gekozen oorsprong, maar dat is niet het geval als de nettokracht (conditie 1) nul is. Schuif alle coördinaten maar met een overall vector  $\mathbf{a}$  op en je ziet dat  $\tau$  niet verandert.

In het geval van een *koppel* van twee tegengestelde krachten kunnen we het gemakkelijk expliciet maken met behulp van  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ ,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1. \quad (118)$$

Het krachtmoment van een koppel hangt af van de afstand tussen de punten waar de tegengestelde krachten werken.

Voorbeelden zijn stilstaande voorwerpen, waar de zwaartekracht wordt gecompenseerd door normaalkrachten, spankrachten, wrijving, etc. In het geval van een homogeen krachtveld zoals (in goede benadering) de zwaartekracht aan het aardoppervlak, is de zwaartekracht op een voorwerp gelijk aan

$$\mathbf{F}_z = \sum_i m_i \mathbf{g} = M \mathbf{g}, \quad (119)$$

Het aangrijpingspunt is te vinden door het krachtmoment te berekenen,

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g} = M \mathbf{R}_{\text{cm}} \times \mathbf{g} = \mathbf{R}_{\text{cm}} \times \mathbf{F}_z. \quad (120)$$

In een homogeen zwaartekrachtveld is dat dus precies het zwaartepunt. Bij het ophangen van een voorwerp aan een punt kunnen we dan eenvoudig zien dat het totale krachtmoment om het ophangpunt nul is wanneer het zwaartepunt zich recht onder het ophangpunt bevindt.

## Statisch evenwicht in een versneld systeem

Voor een systeem dat versnelt weten we dat de som van de krachten de versnelling bepaalt, om precies te zijn de versnelling van het zwaartepunt. In zo'n geval is er sprake van statisch evenwicht als het krachtmoment t.o.v. het zwaartepunt nul is, dus

$$F_{\text{tot}} = \sum_i \mathbf{F}_i = M \mathbf{A}_{\text{cm}} \quad (121)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{cm}} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{cm}}) \times \mathbf{F}_i = 0. \quad (122)$$

## Stabiliteit van een evenwichtssituatie

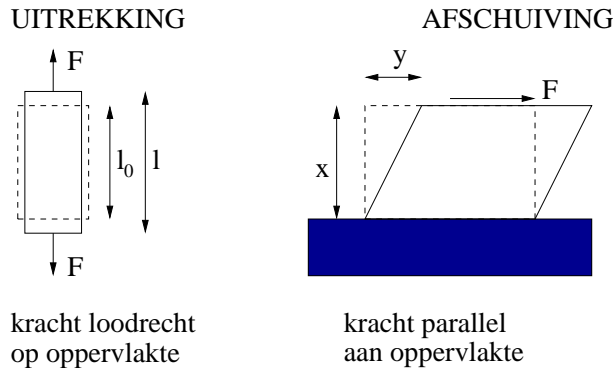
In een evenwichtssituatie kunnen de som van de krachten en het totale krachtmoment nul zijn, terwijl er toch een onstabiele situatie is. Dit is het geval wanneer bij een kleine verplaatsing of een kleine rotatie de totale kracht of het hoekmoment ongelijk aan nul wordt. Of een evenwichtssituatie stabiel is, is vaak het gemakkelijkst te beoordelen door naar de potentiële energie te kijken. Als de afgeleide nul is, is er geen kracht, maar als dat bij een maximum gebeurt hebben we een onstabiele situatie, als de potentiële energie vlak is, hebben we een neutrale situatie. Is het een minimum van de potentiële energie dan hebben we een stabiele situatie. De potentiële energie kunnen we ook als functie van de hoek bekijken bij rotaties.

## 7.3 Spanning in vaste stoffen

Bij externe krachten op vaste stoffen worden de krachten vaak op het oppervlak uitgeoefend. Het is dan nuttig om naar de kracht per oppervlakte te kijken,  $F/A$  bekend als *spanning* (Engels: stress). De eenheid van spanning is  $\text{N/m}^2$ , ook bekend als *Pascal* (Pa),

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2.$$

Bij een vaste stof kijken we naar de vervorming ten gevolge van een op het lichaam uitgeoefende kracht. De kracht per oppervlakte (spanning) die loodrecht op het oppervlak wordt uitgeoefend heet *trekspanning* (Engels: stress) of *drukspanning* (Engels: compressive stress); de kracht per oppervlakte langs het oppervlak uitgeoefend heet *schuifspanning* (Engels: shear stress).



Een trekspanning veroorzaakt een relatieve lengteverandering  $\Delta l/l$  (Engels: strain) die voor kleine strain evenredig is met de spanning (Wet van Hooke) en waarbij de evenredigheidsconstante bekend staat als *elasticiteitsmodulus*, ook wel Young's modulus

$$Y = \frac{F/A}{\Delta l/l}, \quad (123)$$

een verhouding die verschillend kan zijn voor trekken of drukken. Bij grote strain vlakt het verband tussen stress en strain meestal af (verhouding wordt dus kleiner) en boven de *elastische limiet* is het ook niet meer reversibel. De verhouding van maximale trek- of drukspanning en strain bij het breekpunt staat

bekend als *tensile strength* en *compressive strength*, respectievelijk. Een voorbeeld is staal, waarvoor  $Y \approx 200$  GPa met een sterkte van 0.52 GPa. Een ander voorbeeld zijn botten met  $Y_{\text{trek}} \approx 16$  GPa en  $Y_{\text{druk}} \approx 9$  GPa en sterktes van 0.2 GPa (trekken; tensile strength) en 0.27 GPa (drukken; compressive strength), respectievelijk.

Een schuifspanning (shear stress) veroorzaakt een vervorming  $\gamma = y/x$  (Engels: shear strain). Deze is voor kleine vervorming ook weer evenredig met de spanning en de evenredigheidsconstante staat bekend als de *glijdingsmodulus* (Engels: shear modulus, ook wel torsion modulus genoemd),

$$G = \frac{F/A}{y/x}. \quad (124)$$

## 7.4 Druk in vloeistoffen of gassen

Ook bij vloeistoffen en gassen worden krachten vaak op oppervlakken — of misschien beter gezegd op de moleculen aan het oppervlak — uitgeoefend, bijvoorbeeld via een zuiger of oppervlakken die onderdeel uitmaken van de wanden van een container. Voor gassen en vloeistoffen staat de kracht per oppervlakte bekend als *druk* (Engels: pressure),

$$P = \frac{F}{A}. \quad (125)$$

De eenheid van druk is net als spanning de Pascal ( $\text{N}/\text{m}^2$ ), al zijn er diverse andere eenheden in gebruik. De luchtdruk aan het Aardoppervlak is ongeveer  $10^5$  Pa  $\equiv$  1 bar. Ook veelgebruikt is de preciezere gemiddelde waarde van de luchtdruk bij het aardoppervlak, de *atmosfeer*,  $1 \text{ atm} \approx 1013$  mbar.

In het geval van vloeistoffen en gassen is er al een druk van buiten om vloeistof/gas te begrenzen. We kunnen dan wel een drukverandering  $\Delta P$  bekijken. Ook de response van vloeistof/gas is anders, i.p.v. lengte of vorm-verandering zoals we die bij vaste stoffen hebben, krijgen we een volumeverandering  $\Delta V$ . Een drukverandering  $\Delta P$  is in eerste verandering lineair met relatieve afname van het volume,  $-\Delta V/V$ . De evenredigheids constante heet de *bulk modulus*,

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}. \quad (126)$$

Overigens is de bulk modulus ook voor vaste stoffen te gebruiken, bijvoorbeeld voor diamant is die  $B \approx 620$  GPa. Voor water is  $B \approx 2.0$  GPa. Voor gassen is de bulk modulus precies de druk, want omdat  $PV = \text{constant}$ , hebben we dat  $\Delta P V + P \Delta V = 0$ .

## Druk in een vloeistof

Door te kijken naar een kolom vloeistof (oppervlak  $A$ , hoogte  $h$  en vloeistof gekarakteriseerd door de dichtheid  $\rho$ ) zien we dat als de kracht op de bovenzijde van de kolom  $F_{\text{boven}} = PA$  is, er voor de onderzijde het gewicht van de kolom bijkomt, dus  $F_{\text{onder}} = PA + \rho Ahg$  dus we vinden

$$P = P_0 + \rho gh \quad (127)$$

voor de druk op diepte  $h$ . Kenmerkend voor een vloeistof is het *principe van Pascal*, namelijk dat drukveranderingen ongedempt door de vloeistof worden doorgegeven. In een homogeen krachtveld zoals het zwaartekrachtveld is de druk in een horizontaal vlak overal gelijk. Dit vindt toepassingen in communicerende vaten, de kwikthermometer, enz. Bij de kwikthermometer is een uiteinde van een U-vormige buis afgesloten, dus op het zich in dat been bevindende kwik is de druk van boven nul. Om de luchtdruk te compenseren staat het kwik in dat been hoger. Voor de gemiddelde luchtdruk van 1 atmosfeer is dat 760 mm, vandaar  $1 \text{ atm.} = 760 \text{ mm Hg}$ .

## Drukverloop in atmosfeer

In principe geldt  $P = P_0 + \rho gh$  ook in een gas, zoals de atmosfeer, maar  $\rho$  is veel kleiner. Bovendien geldt in een gas dat  $\rho \propto P$  (bij constante temperatuur). In het bijzonder kunnen we schrijven  $\rho/\rho_0 = P/P_0$ ,

waar  $\rho_0$  en  $P_0$  de dichtheid en druk aan aardoppervlak zijn. Dus we krijgen over een hoogteverschil  $dh$  een drukverandering (afname  $-dP$ ) waarvoor geldt

$$dP = \rho g dh = \frac{\rho_0 g}{P_0} P dh.$$

De oplossing van deze vergelijking is

$$P(h) = P_0 e^{-h/h_0} \quad \text{met } h_0 = \frac{P_0}{\rho_0 g}. \quad (128)$$

De waarde van  $h_0$  is  $h_0 = 1.013 \times 10^5 / (1.293 \times 9.8) \approx 8$  km. Omdat voor kleine hoogte  $\exp(-h/h_0) \approx 1 - h/h_0$ , zien we een 1% afname in luchtdruk over 80 m.

## Opwaartse kracht

In een vloeistof of gas (lees water, afgekort w) is het krachtverschil op boven en onderkant van een voorwerp per kolom met oppervlak  $dA$  gelijk aan een opwaarts gerichte kracht  $F_{\text{opw}} = \rho_w g h dA$ , waarbij  $h$  de hoogte van de kolom is. De kracht naar beneden is het gewicht  $F_{\text{zw}} = \rho g h dA$ . Voor het hele voorwerp zien we naast de zwaartekracht een opwaartse kracht,

$$F_{\text{zw}} = M g = \rho V g \quad \text{en } F_{\text{opw}} = \rho_w V_w g, \quad (129)$$

waar  $V_w$  het volume 'onder water' is; in woorden een *opwaartse kracht* (Engels: buoyant force) gelijk aan het gewicht van de verplaatste vloeistof.

Dit betekent voor een voorwerp met  $\rho < \rho_w$  dat  $V_w/V = \rho/\rho_w$ , dus het voorwerp drijft en de verhouding van de dichtheden bepaalt welke delen van het volume boven en onder water liggen.

## 7.5 Vloeistoffen en gassen in beweging

Hier komt een heel onderzoeksveld in de fysica om de hoek kijken, de stromingsleer. We beperken ons tot enkele basisbegrippen. Gegeven dat een stromende vloeistof door oppervlak  $A_1$  met snelheid  $v_1$  beweegt en verderop door oppervlak  $A_2$  beweegt met snelheid  $v_2$ , dan moet voor een *onsamendrukbare* vloeistof (Engels: incompressible fluid) gelden dat in een tijd  $\Delta t$  de volumeverandering  $\Delta V = A_2 v_2 \Delta t - A_1 v_1 \Delta t = 0$ , dus de *volumestroom* (Engels: volume flow rate)

$$I_v = A v \quad (130)$$

is constant ( $A_1 v_1 = A_2 v_2$ ). Dit staat bekend als de *continuïteitsvergelijking* in een onsamendrukbare vloeistof. Bijvoorbeeld de flow rate van de aorta (straal 1 cm, snelheid 30 cm/s) is ongeveer  $10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$  of 6 l/min.

We hebben al de drukverschillen in een vloeistof ten gevolge van hoogteverschillen besproken. Ook de snelheid speelt hier een rol. Daarvoor realiseren we ons dat de druk op plaats 1 (stroming door oppervlak  $A_1$  met snelheid  $v_1$ ) betekent dat er arbeid wordt verricht om precies te zijn in het tijdsinterval  $\Delta t$  waarin de vloeistof zich verplaatst over afstand  $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$ ,

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 \Delta V.$$

Net zo hebben we  $W_2 = P_2 \Delta V$ , en we weten dat

$$W_1 - W_2 = \frac{1}{2} \Delta M v_2^2 + \Delta M g h_2 - \frac{1}{2} \Delta M v_1^2 - \Delta M g h_1,$$

waar  $\Delta M = \rho \Delta V$ . Dus we vinden dat

$$P + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constant} \quad (131)$$

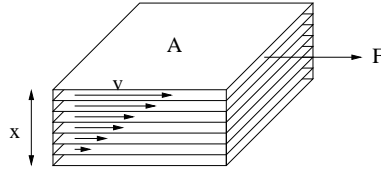
(*Bernoulli's vergelijking*), in wezen niets anders dan een soort energiebehoud per volume (vgl  $\text{N/m}^2 = \text{J/m}^3$ ) in een vloeistof. Dit is een veralgemenisering van onze eerdere resultaat over drukverandering afhankelijk van de hoogte. Het laat zien dat de druk lager wordt als de snelheid van vloeistof/gas hoger is (*Venturi effect*), wat ook een rol speelt bij vliegen. Een simpele toepassing is bijvoorbeeld ook de berekening van de uitstroomsnelheid door een gat dat zich een afstand  $\Delta h$  onder het oppervlak bevindt,  $v = \sqrt{2g \Delta h}$ .

## 7.6 Viscositeit

Meestal zijn vloeistoffen niet ideaal, d.w.z. we hebben te maken met wrijving langs de wanden en wrijving van lagen in de vloeistof ten opzichte van elkaar. In een pijp zal de stroomsnelheid gaande naar de wand afnemen. Er zal energieverlies optreden, dus  $W_1 - W_2$  kan niet gebruikt worden zoals in de vorige paragraaf. Dit betekent dat er een drukverschil  $\Delta P$  nodig is om een volumestroom in stand te houden,

$$\Delta P = I_v R, \quad (132)$$

waar  $R$  (eenheid  $\text{Pa}\cdot\text{s}/\text{m}^3$ ) de *stromingsweerstand* (Engels: flow resistance) is. Om een voorbeeld te geven; de druk in de aorta is ongeveer  $100 \text{ mm Hg} \approx 0.13 \text{ kPa}$ . De druk neemt af tot ongeveer 0 voordat het via kleinere bloedvaten uiteindelijk weer het hart bereikt. We hebben eerder al genoemd dat  $I_v \approx 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ . De totale weerstand van de bloedsomloop is dus ongeveer  $0.13 \text{ GPa}\cdot\text{s}/\text{m}^3$ .



Om viscositeit te bestuderen, beschouwen we de stroming tussen twee oppervlakken  $A$ , waarbij een kracht  $F$  wordt uitgeoefend de getekende snelheidsgradiënt tussen de platen over afstand  $x$  te krijgen. De viscositeit  $\eta$  is de evenredigheidsconstante in

$$\eta = \frac{F/A}{x/v}, \quad (133)$$

met als eenheid  $\text{Pa}\cdot\text{s}$ , waarbij ook vaak de eenheid *Poise* gebruikt wordt,  $10 \text{ poise} = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Voorbeelden zijn  $\eta_{\text{water}} \approx 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  (bij  $20^\circ \text{ C}$ ) en  $0.65$  (bij  $60^\circ \text{ C}$ ) of de viscositeit van bloed,  $\eta_{\text{bloed}} \approx 4 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ .

De stromingsweerstand per lengte ( $L$ ) bij een continue stroom door een pijp met straal  $r$  wordt gegeven door

$$\frac{R}{L} = \frac{8\eta}{\pi r^4}. \quad (134)$$

waaruit de drukvermindering over lengte  $L$  gevonden wordt

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{8\eta}{\pi r^4} I_v. \quad (135)$$

(*Poiseuille's wet*). Deze wetmatigheid werkt als de stroming gelaagd (laminair) is. Als de stroomsnelheid erg groot wordt dan is de stroming turbulent. Het overgangsgedrag tussen deze extremen ligt bij

$$2000 < N_R = \frac{2\rho r v}{\eta} < 3000, \quad (136)$$

waar  $N_R$  het zogenaamde *Reynolds getal* is. Voor de bloedstroom in de aorta vinden we  $N_R \approx 1500$ .

## 8 Gravitatie

### 8.1 Separatie van variabelen

De gravitatiekracht tussen twee massa's  $m_1$  en  $m_2$  hangt alleen af van de relatieve afstand  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{G m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= +\frac{G m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (137)$$

Gebruikmakend van zwaartepunt  $\mathbf{R}$  en relatieve coördinaat  $\mathbf{r}$  krijgen we

$$M \ddot{\mathbf{R}} = 0, \quad (138)$$

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G M m}{r^3} \mathbf{r}, \quad (139)$$

waar  $M = m_1 + m_2$  de som van de massa's is en  $m = m_1 m_2 / M$  de gereduceerde massa is (merk op dat  $m_1 m_2 = M m$ ). Het twee-deeltjesprobleem is dus gereduceerd tot een probleem voor één deeltje met massa  $m$  in het zwaartekrachtveld van massa  $M$ .

### 8.2 Gravitatiepotentiaal

De gravitatiekracht is een conservatieve kracht die afgeleid kan worden van een potentiaal. Die kunnen we t.o.v. afstand oneindig gemakkelijk vinden door de kracht langs de weg te integreren. Het resultaat is een potentiaal

$$U(r) = -\frac{G M m}{r}, \quad (140)$$

die alleen van de relatieve afstand afhangt, en wel alleen van de grootte van die afstand. Dit is een centrale potentiaal. In Eq. 105 hebben we al aangegeven hoe de kracht in zo'n geval gevonden wordt. Bovendien is  $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$  en dus het impulsmoment  $\boldsymbol{\ell} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  is behouden. Dit zullen we hieronder gebruiken om de banen in een gravitatieveld te vinden.

Gebruikmakend van de potentiële energie kunnen we eenvoudig vragen beantwoorden als wat de energie van een object moet zijn om te ontsnappen uit een gravitatieveld. Om zonder kinetische energie op oneindige afstand te kunnen komen moet de totale energie inclusief potentiële energie minstens nul zijn. Een massa op het aardoppervlak heeft potentiële energie  $-GmM_A/R_A$ , waar  $M_A$  en  $R_A$ , massa en straal van de Aarde zijn. Dus

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G M_A m}{R_A} \geq 0 \quad \implies \quad v_e \geq \sqrt{\frac{2 G M_A}{R_A}},$$

waarbij de minimale snelheid de *ontsnappingssnelheid* is.

### 8.3 Cirkelbaan

De eenvoudigste oplossing van het gravitatieprobleem is een cirkelbaan, dus  $r = R$ . In dat geval reduceert de linkerkant van Eq. 139 tot de centripetale kracht, die ook langs  $-\mathbf{r}$  gericht is en geldt

$$\frac{m v^2}{R} = \frac{G M m}{R^2}, \quad (141)$$

dus  $v^2 = GM/R$  of voor hoeksnelheid  $\omega^2 = GM/R^3$ . Gegeven de omlooptijd  $T$  hebben we  $\omega = 2\pi/T$  en we zien bijvoorbeeld de bekende relatie

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}, \quad (142)$$

die het verband geeft tussen baanstraal en omlooptijd in bijvoorbeeld ons planetenstelsel (We zullen hieronder zien dat deze relatie in iets gewijzigde vorm ook geldt voor ellipsbanen).

We zien dat een baan mogelijk is voor iedere straal  $R$ . Gegeven de straal zijn energie en impulsmoment bepaald,

$$E(R) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R}, \quad (143)$$

$$\ell^2 = m^2v^2R^2 = GMm^2R. \quad (144)$$

De totale energie  $E < 0$  wat betekent dat het systeem 'gebonden' is (kan niet naar oneindig).

## 8.4 Banen in een gravitatieveld

Het hierboven al genoemde behoud van impulsmoment heeft twee belangrijke consequenties. De eerste is dat de baanbeweging in een vlak ligt, namelijk het vlak loodrecht op  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{v}$ . Tweede consequentie is dat in een gegeven tijdsinterval  $dt$ , de grootte  $\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt$  constant is. Zoals we bij uitproducten gezien hebben is dit precies 2 x de oppervlakte van de in een tijd  $dt$  bestreken oppervlak in de baan van de ene massa gezien vanuit de andere massa. Dit is precies de bekende *perkenwet* van Kepler.

Om de banen te beschrijven is het gebruik van poolcoördinaten het meest geschikt. Het gaat tenslotte om beweging in een vlak in een rotatie-symmetrische situatie. De cirkelbaan is een van de mogelijke banen, maar we zullen algemener ellips-, parabool- en hyperboolbanen tegenkomen. We zullen deze banen eerst wiskundig bespreken.

In poolcoördinaten wordt een ellips t.o.v. het brandpunt F beschreven met

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi} \quad \text{met } e < 1. \quad (145)$$

De afstand  $a$  heet de halve grote as. De minimale afstand tot F wordt bereikt voor  $\varphi = 0$  en is gelijk aan  $r_{\min} = a(1 - e)$ , voor een planeet het perihelium van de ellipsbaan genoemd, de maximale afstand wordt bereikt voor  $\varphi = \pi$  en is gelijk aan  $r_{\max} = a(1 + e)$  en heet het aphelium. De afstand van F tot het middelpunt M van de ellips is  $e a$ . De korte as van de ellips heeft lengte  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ . In Cartesische coördinaten (met  $x = e a + r \cos \varphi$  en  $y = r \sin \varphi$ ) hebben we

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (146)$$

Het geval dat  $e > 1$ ,

$$r(\varphi) = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \varphi} \quad \text{met } e > 1. \quad (147)$$

representeert een hyperbool met als minimale afstand tot het brandpunt (voor  $\varphi = 0$ ) de afstand  $a(e - 1)$ . De asymptoten corresponderen met de (twee tegengestelde) waarden voor  $\varphi$  gegeven door  $\cos \varphi = -1/e$  vanaf het 'middelpunt' dat op afstand  $e a$  van het brandpunt ligt (en op afstand  $a$  van het perihelium). T.o.v. van dit middelpunt hebben we in Cartesische coördinaten ( $x = r \cos \varphi - e a$  en  $y = r \sin \varphi$ ) de vorm

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (148)$$

met  $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ .

Om de baan in het gravitatieveld af te leiden starten we met de vergelijking

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}, \quad (149)$$

en we gebruiken dat

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad \implies \quad \mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad \text{is constant.} \quad (150)$$

Vervolgens berekenen we

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{C} \times \dot{\mathbf{r}}) &= \mathbf{C} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{C} \times \mathbf{r} \\ &= GM \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - GM \frac{(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}}{r^2} = \frac{d}{dt} \left( -GM \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \end{aligned}$$

We concluderen dat

$$\mathbf{C} \times \dot{\mathbf{r}} + GM \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{D} = 0, \quad (151)$$

waar  $\mathbf{D}$  een constante vector is. We zullen de lengte hiervan  $|\mathbf{D}| \equiv e GM$  noemen. De vector  $\mathbf{D}$  is een (constante) vector die in het baanvlak ligt en naar het perihelium wijst. Nemen we het inproduct met  $\mathbf{r}$  dan krijgen we

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{C} \times \dot{\mathbf{r}}) + GM r + e GM r \cos \varphi = 0.$$

waar de eerste term  $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{C} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{C}^2$ . Dus we zien dat

$$r = r(\varphi) = \frac{\mathbf{C}^2}{GM(1 + e \cos \varphi)}.$$

of door  $\mathbf{C}^2$  met  $m^2$  te vermenigvuldigen dat

$$\ell^2 = m^2 \mathbf{C}^2 = GMm^2 r(1 + e \cos \varphi) = \text{constant}. \quad (152)$$

Vullen we de perihelium afstand in,  $r(\varphi = 0) = a(1 - e)$  dan krijgen we (bij een ellipsbaan)

$$\ell^2 = GMm^2 a(1 - e^2), \quad (153)$$

en we krijgen voor  $r(\varphi)$  de vorm

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}, \quad (154)$$

Uit  $\ell^2 = m^2 \omega^2 r^4$  constant is zien we dat de tangentiële snelheidscomponent  $v_t = \omega r$  wordt gegeven door

$$v_t^2 = \omega^2 r^2 = \frac{GM}{a(1 - e^2)} (1 + e \cos \varphi)^2. \quad (155)$$

We kunnen ook de radiële component  $v_r = \dot{r}$  berekenen. Met Eq. 152 zien we dat  $r(1 + e \cos \varphi)$  constant is, dus

$$\dot{r}(1 + e \cos \varphi) - er \sin \varphi \dot{\varphi} = 0,$$

waaruit we  $\dot{r}$  in termen van  $\omega$  kunnen vinden,

$$v_r^2 = \dot{r}^2 = \frac{GM}{a(1 - e^2)} e^2 \sin^2 \varphi. \quad (156)$$

De totale energie in de ellipsbaan is dan

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2) - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2} \frac{GM}{a}. \quad (157)$$

Uit de grootte van het impulsmoment kunnen we bovendien direct de afgelegde oppervlakte per tijdseenheid berekenen,

$$dO = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| dt = \frac{|\ell|}{2m} dt = \frac{1}{2} \sqrt{GM a(1 - e^2)} dt. \quad (158)$$

Voor een volledige periode  $T$  krijgen we gebruikmakend van de oppervlakte van een ellips het resultaat  $\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = T \sqrt{GM a(1 - e^2)}/2$ , oftewel

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}, \quad (159)$$

het algemene resultaat wat laat zien dat we i.p.v. de straal van een cirkel de halve grote as van de ellips moeten gebruiken, net als in de uitdrukking voor de energie. We hebben nu alle drie de wetten van Kepler bewezen, namelijk planeten bewegen in ellipsbanen, elke planeet legt in de eigen baan gelijke oppervlakken af in gelijke tijdintervallen en er is een verband tussen kwadraten van omlooptijden en derde machten van de halve grote as..

## 8.5 Gravitationeveld van massaverdeling

Voor een verzameling van massa's  $M_i$  vinden we de kracht op een testmassa  $m$  door alle krachten op te tellen. We zien bijvoorbeeld dat het verschil maakt voor een halter met twee massa's of de testmassa langs de verbindingslijn ligt op op de middelloodlijn. Door dit soort krachtverschillen te meten kan men Newton's constante  $G$  bepalen.

Ook inhomogeniteiten in de Aarde leiden in principe tot variaties in de sterkte van het gravitatieveld op het aardoppervlak. Vrij eenvoudig is te berekenen dat voor een testmassa  $m$  op afstand  $r$  van een holle bolschil met massa  $M$  (massa homogeen over schil verdeeld) geldt dat buiten de bolschil ( $r > R$ ) de gravitatiekracht gelijk is aan de gravitatie alsof de massa  $M$  in het centrum van de bol zat en 0 als de testmassa zich binnen de bolschil bevindt,

$$\text{Bolschil:} \quad \mathbf{F} = -\frac{GM_{\text{schil}} m}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{voor } r > R \quad (160)$$

$$\mathbf{F} = 0 \quad \text{voor } r < R. \quad (161)$$

Hieruit is eenvoudig te zien dat voor het gravitatieveld in een homogene bol geldt

$$\text{Homogene bol:} \quad \mathbf{F} = -\frac{GM_{\text{bol}} m}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{voor } r > R \quad (162)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_{\text{bol}} m}{R^3} \mathbf{r} \quad \text{voor } r < R. \quad (163)$$

Met dit als een goede benadering voor de Aarde, zien we dat bij het aardoppervlak de versnelling gelijk is aan  $g = GM_A/R_A^2$  (naar centrum van de Aarde gericht).

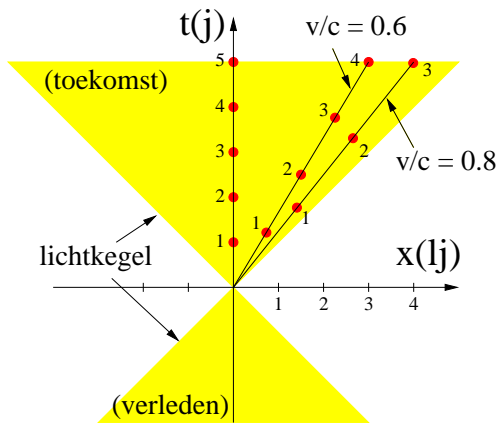
## 9 Speciale relativiteitstheorie

### 9.1 Beweging in verschillende referentiesystemen

De uitgangspunten van speciale relativiteitstheorie zijn:

- Relativiteit: het is niet mogelijk absolute snelheden vast te leggen, alle regels van de fysica zijn equivalent in referentiesystemen die met eenparige snelheid t.o.v. elkaar bewegen (inertiaalsystemen).
- De lichtsnelheid is in al zulke referentiesystemen hetzelfde (speciaal!)

Met eenvoudige gedachten experimentjes is dan te beredeneren dat, als de eenparige snelheid waarmee twee systemen t.o.v. elkaar bewegen langs de x-richting is, dat in dat geval afstanden loodrecht op de bewegingsrichting niet veranderen, d.w.z. dat voor tijd en plaats gezien in systeem  $S$  (tijd  $t$ , plaats  $x, y, z$ ) of in  $S'$  (tijd  $t'$ , plaats  $x', y', z'$ ) geldt dat  $y = y'$  en  $z = z'$ .



Vervolgens is eenvoudig te beredeneren dat de constante lichtsnelheid dan impliceert dat een bewegende klok langzamer loopt, de *tijddilatatie* (Engels: time dilatation) in formule

$$dt = \gamma d\tau = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (164)$$

In de figuur is geïllustreerd wat dat betekent wanneer iemand plaats  $x$  en tijd  $t$  tegen elkaar uitzet. In deze figuur geven de getalletjes bij de bolletjes de 'kloktijden' oftewel *eigentijden* (Engels: proper times) aan voor de waarnemer zelf (langs verticale as) en voor twee bewegende 'klokken' met snelheden  $v/c = 0.6$  en  $v/c = 0.8$ , respectievelijk. De gamma factoren zijn  $\gamma = 1.25$  en  $\gamma = 5/3$  respectievelijk. Voor het gemak zijn er schalen gekozen waarbij  $c = 1$  (1 lichtjaar/jaar).

Het verband tussen  $dt$ ,  $d\tau$  en  $v = dx/dt$  in vgl. 164 is niets anders dan

$$c^2 dt^2 - dx^2 = d\tau^2 \quad \text{of} \quad c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 = \tau^2, \quad (165)$$

Lijnen waar de eigentijd  $\tau$  constant is zijn hyperbolen. Het gekleurde gebied correspondeert met  $\tau^2 \geq 0$  begrensd door de zogeheten lichtkegel (Engels: light cone), waar het gebied  $\tau \geq 0$  de 'toekomst' is, d.w.z. de plaatsen en tijden die in principe 'bereikbaar' zijn vanuit de oorsprong. Voor  $\tau = 0$  wordt vgl. 165  $x = \pm ct$ . Bewegend met de lichtsnelheid staat de klok stil en de snelheid is  $c$  in alle systemen. wat betekent dat de lichtsnelheid altijd dezelfde is, maar dat gelijktijdigheid ( $dt = 0$ ) en dezelfde plaats ( $dx = 0$ ) relatieve begrippen worden. De relaties tussen coördinaten in twee inertiaalsystemen zijn de speciale Lorentz transformaties, voor het geval dat systeem  $S'$  met snelheid  $u$  langs positieve  $x$ -as beweegt t.o.v. systeem  $S$  gegeven door

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y' &= y, & y &= y', \\ z' &= z, & z &= z', \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & t &= \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \end{aligned} \quad \text{of} \quad (166)$$

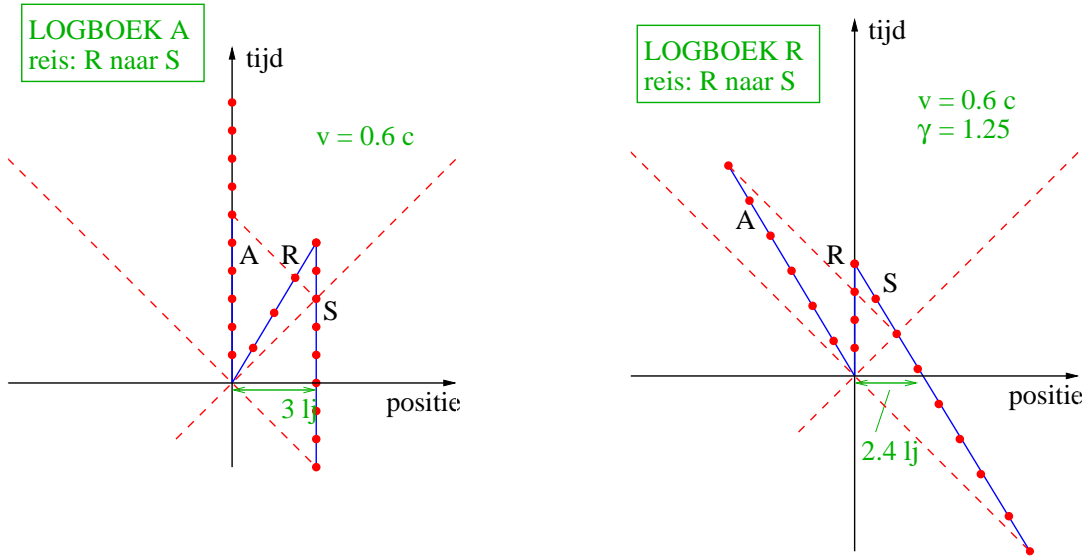
een transformatie waarin de ruimtetijd coördinaten  $ct$  en  $\mathbf{r}$  gelijkwaardig zijn. De vanzelfsprekendheid van deze transformatie zullen we verderop bespreken. Kijken we hier naar de consequenties dan zien we dat de lengte gezien door bewegende waarnemer  $x'_1 - x'_2$  (op één tijdstip  $t'_1 = t'_2$ ) anders is dan de corresponderende lengte, de *eigenlengte* (Engels: proper length)  $L_0 = x_1 - x_2$  in het rustsysteem van

punten  $x_1$  en  $x_2$ . We hebben (terugtransformerend naar rustsysteem)

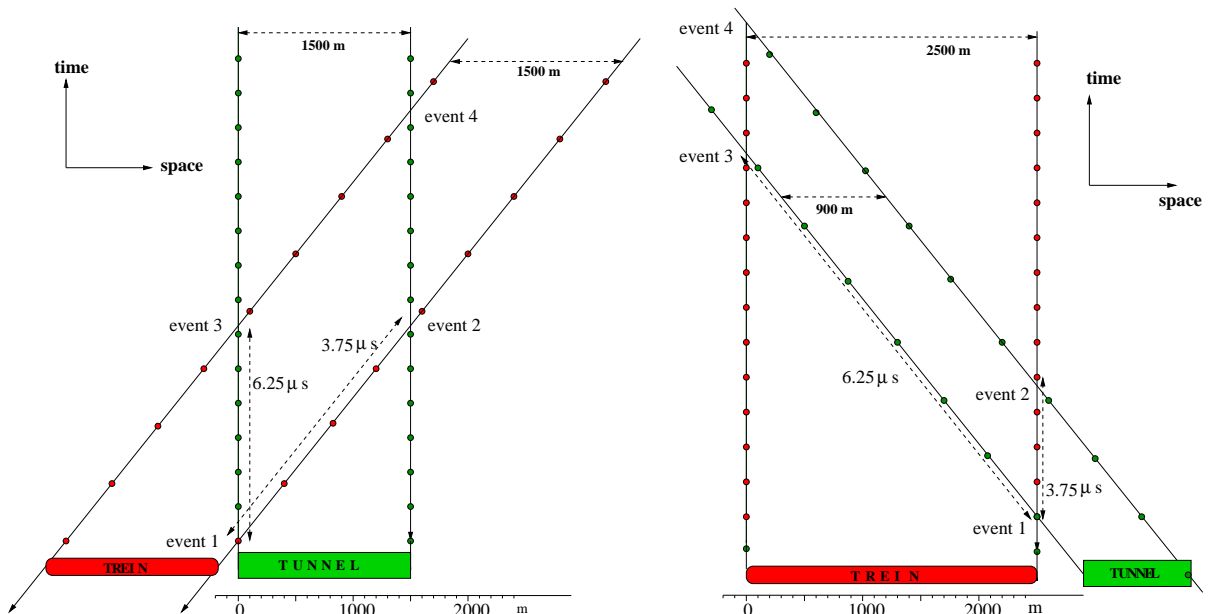
$$L_0 = x_1 - x_2 = \gamma(x'_1 - x'_2) \quad \text{of} \quad L = L_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (167)$$

(Lorentz contractie). De tijddilatatie zit er vanzelfsprekend ook in. De tijd  $dt' = t'_1 - t'_2 = \gamma(t_1 - t_2) = \gamma dt$  als de klok zich op positie  $x_1 = x_2$  bevindt, d.w.z. stilstaat in  $S$ .

Maar gebeurtenissen (Engels: events), het samenvallen van  $x_1(t_1)$  en  $x_2(t_2)$  in een referentiesysteem corresponderen met gebeurtenissen in elk referentiesysteem;  $dx = dt = d\tau = 0$  impliceert ook  $dx' = dt' = 0$ . Dit laatste kan mooi geïllustreerd worden door een 'reis' vanaf Aarde (A) naar een ster (S) door een reiziger (R) vanuit A of R te bekijken (figuren links/rechts hieronder) inclusief een aantal berichten (met lichtsnelheid verstuurde berichten aangegeven met stippellijnen).



Een tweede voorbeeld dat ook vaak wordt aangehaald is de trein en de tunnel. Het voorbeeld is voor een trein met lengte van 2500 m en een tunnel met lengte van 1500 m. De relatieve snelheid van trein en tunnel is  $v = 0.8c$ , dus  $\beta = 0.8$ ,  $\gamma = 5/3$ .



## 9.2 Optellen van snelheden

Snelheden optellen kan dus niet meer gewoon. Uitschrijven van  $v'_x = dx'/dt'$ , etc. in termen van  $dx$ ,  $dt$  en  $dx$  laat zien dat

$$\begin{aligned}v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}, \\v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}, \\v'_z &= \frac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}.\end{aligned}\tag{168}$$

Snelheden in de transversale richting veranderen dus ook en de snelheid in de bewegingsrichting hangt af van van  $u$ , maar is niet de 'klassieke' som/verschil van de snelheden.

## 9.3 Relativistische energie en impuls

Vanaf de oorsprong gezien kunnen we de beweging van een object/deeltje zien als een baan afhankelijk van de eigentijd,  $x(\tau)$  met een bepaalde *eigensnelheid*  $dx/d\tau$ . Dit is dus niet de snelheid want die is  $v = dx/dt = (1/\gamma)(dx/d\tau)$ . De afwezigheid van een kracht op het object vertaald in geen *eigenversnelling* betekent dat de *impuls*,

$$p = m \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} = m \mathbf{v} \gamma,\tag{169}$$

constant is in  $S$ , maar ook in  $S'$ , al heeft de impuls (met name de  $x$ -component) niet dezelfde waarde in die systemen (als  $u$  langs  $x$ -richting ligt).

Om de kinetische energie te vinden gebruiken we eenvoudig de relatie  $dK = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}$  (omdat  $dK = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  en  $d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt$ ). Uit de vgl. 169 volgt dat

$$d\mathbf{p} = \frac{m d\mathbf{v}}{(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{3/2}},$$

of

$$dK = \frac{m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}}{(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{3/2}},$$

waaruit we krijgen

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} - mc^2.$$

Inclusief de rustenergie  $mc^2$  wordt de energie

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} = mc^2 \gamma,\tag{170}$$

en we zien ook de vaak nuttige relatie

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v},\tag{171}$$

die waar is voor alle snelheden en voor een (massaloos) foton de relatie  $E = pc$  geeft.

De uitdrukking voor de energie is ook precies gelijk aan  $E = mc^2 dt/d\tau$ , waaruit we meteen zien dat de transformatie voor de energie-impuls  $E$  en  $\mathbf{p}c$  qua vorm identiek is aan die voor tijd-ruimte,  $ct$  en  $\mathbf{r}$ .  
Expliciet

$$p'_x = \frac{p_x - (u/c^2) E}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},\tag{172}$$

$$p'_y = p_y,\tag{173}$$

$$p'_z = p_z,\tag{174}$$

$$E' = \frac{E - u p_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},\tag{175}$$

Net als bij ruimte-tijd is er een invariante grootheid,

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (176)$$

Dat Lorentz transformaties de 'vanzelfsprekende' transformaties zijn bij zo'n invariante grootheid waarin een verschil voorkomt is het eenvoudigste te zien wanneer we ons realiseren dat gegeven vgl. 176,  $E$  en  $pc$  ook geschreven kunnen worden als

$$E = mc^2 \cosh(\eta), \quad (177)$$

$$pc = mc^2 \sinh(\eta). \quad (178)$$

Een Lorentz transformatie is dan niets anders dan een andere  $\eta$  (vergelijk verandering van hoek bij rotaties) waarbij  $\eta' = \eta + \phi$ . In dat geval is

$$\cosh \phi = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{E}{mc^2}, \quad (179)$$

$$\sinh \phi = \beta\gamma = \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{p}{mc}. \quad (180)$$

#### 9.4 Het Doppler effect voor licht

Om het Doppler effect voor licht te vinden is het voldoende om ons te realiseren dat voor lichtgolven geldt dat

$$E = pc = hf = \frac{hc}{\lambda}. \quad (181)$$

Ongeacht of de waarnemer van de bron weg beweegt of dat de bron zich verwijderd van de waarnemer met snelheid  $u$  geldt bij verwijdering dan eenvoudig dat

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} (hf - u hf/c), \quad (182)$$

dus

$$f' = f \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}, \quad (183)$$

dus een lagere frequentie en grotere golflengte (roodverschuiving). Let wel op dat voor golven in een medium andere relaties gelden.

## 10 Trillingen

### 10.1 De harmonische oscillator

In veel fysische problemen komen we de situatie tegen dat de kracht tegengesteld is aan de uitwijking vanuit de evenwichtsstand (wet van Hooke), waarbij de bewegingsvergelijking wordt gegeven door

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \ddot{x} = F_x = -kx. \quad (184)$$

De grootte  $k$  is de *veerconstante*. Gebruikmakend van  $\omega_0^2 = k/m$  krijgen we  $m\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ . De oplossing van deze vergelijking is

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t), \quad (185)$$

waar we twee constanten tegengekomen (zoals normaliter bij tweede orde differentiaalvergelijkingen). Uit twee randvoorwaarden, bijvoorbeeld  $x(0)$  en  $\dot{x}(0)$ , kunnen die bepaald worden. In plaats van deze vorm komen we ook vaak de uitdrukking

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \delta), \quad (186)$$

tegen, maar die is in wezen identiek aan de voorgaande omdat herschrijving  $x(t) = A \cos(\delta) \cos(\omega_0 t) + A \sin(\delta) \sin(\omega_0 t)$  geeft. Het argument van de oplossing bevat

$$\omega_0 t = 2\pi f_0 t = 2\pi \frac{t}{T_0}, \quad (187)$$

waar  $\omega_0$  de *hoekfrequentie* (Engels: angular frequency),  $f_0$  de *frequentie* en  $T_0$  de *trillingstijd* (Engels: period) is en een *fase* (Engels: phase)  $\delta$ .

De oplossing in de vorm 186 geeft voor de snelheid en versnelling

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \delta), \quad (188)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega_0 A \cos(\omega_0 t + \delta) = -\omega_0^2 x, \quad (189)$$

maar dat laatste wisten we al. Een interessant detail van de oplossing is dat de frequentie niet samenhangt met de amplitudo  $A$  van de oplossing, een belangrijk aspect bij bijvoorbeeld tijdmetingen. Verder merken we op dat de beweging  $x(t)$  gezien kan worden als een projectie van een cirkelbeweging in het  $x$ - $y$  vlak.

### 10.2 Energie van een harmonische trilling

De kracht van een harmonische oscillator kan worden afgeleid van de potentiaal

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2. \quad (190)$$

De energie (som van kinetische en potentiële energie),

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2, \quad (191)$$

is behouden. Voor de oplossing 186 zien we dat ook gemakkelijk,

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2, \quad (192)$$

zoals verwacht gelijk aan de potentiële energie bij de maximale uitwijking  $x = \pm A$  waar de snelheid nul is en gelijk aan de kinetische energie wanneer de trilling door de evenwichtsstand gaat.

### 10.3 Gedempte trillingen

Met een dempingskracht die groeit met de snelheid en tegengesteld is aan de snelheid,

$$F_d = -bv = -b\dot{x}, \quad (193)$$

zien we bijvoorbeeld dat de bewegingsvergelijking wordt

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad \text{of} \quad \ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (194)$$

Naast frequentie  $\omega_0$  of trillingstijd  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  zien we een andere tijdschaal  $\tau = m/b$  opduiken. Deze heet *dempingstijd*.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = m\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = -\frac{m}{\tau} \dot{x}^2 = -b\dot{x}^2 = F_d \dot{x}.$$

Dus er gaat energie verloren (dissipatie) die we via de bewegingsvergelijkingen of via kracht  $\times$  weg kunnen vinden.

#### Oplossingen voor gedempte trillingen

We gaan hiervoor eerst terug naar de oscillator zonder demping. Een lineaire vergelijking in functies  $x(t)$  en afgeleiden hiervan is op te lossen door  $x(t) = e^{\alpha t}$  te proberen. We krijgen dan voor de ongedempte trilling

$$\text{zonder demping: } \alpha^2 + \omega_0^2 = 0 \implies \alpha = \pm i\omega_0. \quad (195)$$

Er zijn dus twee onafhankelijke oplossingen  $e^{\pm i\omega_0 t}$ , waaruit we inderdaad weer de oplossing 185 vinden wanneer we gebruikmaken van de relaties (voor complexe getallen)

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi) \quad \text{en} \quad e^{-i\phi} = \cos(\phi) - i \sin(\phi),$$

of de geïnverteerde relaties

$$\cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \quad \text{en} \quad \sin(\phi) = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}).$$

Wanneer we hetzelfde doen met de bewegingsvergelijking voor de gedempte trilling krijgen we

$$\text{met demping: } \alpha^2 + \frac{\alpha}{\tau} + \omega_0^2 = 0 \implies \alpha = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2}. \quad (196)$$

We onderscheiden hier drie gevallen

- *Onderdamping* (Engels: underdamping) waarbij  $1/2\tau < \omega_0$  of  $Q = \omega_0\tau > 1/2$ . De grootheid  $Q$  heet de *quality factor*. In dit geval geeft de wortel twee imaginaire waarden:

$$\alpha = \pm i\omega'_0 = \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} = \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \quad (197)$$

en de meest algemene oplossing kan worden geschreven als

$$x(t) = A_0 e^{-t/2\tau} \cos(\omega'_0 t - \delta), \quad (198)$$

waar de (begin)amplitudo  $A_0$  en de fase  $\delta$  bepaald worden uit beginvoorwaarden. De feitelijke amplitudo van de oscillaties neemt af met de afvallende e-macht. De som van kinetische en potentiële energie neemt af als

$$E(t) = E(0) e^{-t/\tau},$$

waaruit we zien dat  $\tau$  de (exponentiële) dempingstijd is. De quality factor wordt bepaald door de verhouding van eigentrillingstijd en dempingstijd, precies  $Q = 2\pi\tau/T_0$ .

- *Overdamping* waarbij  $1/2\tau > \omega_0$  of  $Q < 1/2$ . Nu hebben we twee reële (negatieve) waarden voor  $\alpha$ ,

$$\alpha = -\frac{1}{2\tau} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right).$$

De oplossing is de som van twee afvallende e-machten, waarbij de minst snel afvallende degene is met de kleinste waarde voor  $|\alpha|$  (met minteken) de 'overblijvende' e-macht is. Bij heel grote demping (heel kleine  $\tau$ ) worden de twee waarden  $\alpha \approx 0$  en  $\alpha = -1/\tau$ . Dit betekent dat in een zeer korte tijd  $\tau$  de beweging tot stilstand komt, maar dit kan bij een eindige uitwijking zijn waar het systeem dan blijft 'hangen'.

- *Kritische demping* waarbij  $1/2\tau = \omega_0$  of  $Q = 1/2$ . In dat geval is er maar een oplossing voor  $\alpha = \omega_0 = 1/2\tau$ , en de oplossing is

$$x(t) = (A + Bt) e^{-t/\tau}. \quad (199)$$

## 10.4 Aangedreven trillingen

Het laatste geval dat we bekijken is de trilling met een externe kracht als aandrijving (zoals een schommel). We kijken naar een harmonisch aangedreven trilling met

$$F_{\text{extern}} = F_0 \cos(\omega t). \quad (200)$$

De bewegingsvergelijking wordt

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad \text{of} \quad \ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t). \quad (201)$$

We merken allereerst op dat als we een oplossing hebben, we er altijd een oplossing van de niet-aangedreven trilling bij op kunnen tellen. Als er demping is zal die trilling verdwijnen. Wat overblijft kan eigenlijk niet anders zijn dan iets wat met frequentie  $\omega$  trilt, eventueel voor- of achterlopend bij de aandrijving. We proberen

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta). \quad (202)$$

Invullen levert dan de vergelijking

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \delta) - A \frac{\omega}{\tau} \sin(\omega t - \delta) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t).$$

Gebruikmakend van de goniometrische relatie

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta),$$

zien we dat

$$\underbrace{A(\omega_0^2 - \omega^2)}_{(F_0/m) \cos(\delta)} \cos(\omega t - \delta) - \underbrace{A(\omega/\tau)}_{(F_0/m) \sin(\delta)} \sin(\omega t - \delta) = (F_0/m) \cos(\omega t).$$

Het resultaat is dus een (eind)oplossing van de vorm in vgl. 202 met amplitudo en fase gegeven door

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}} \quad (203)$$

$$\tan \delta = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (204)$$

De amplitudo hangt dus van de aandrijffrequentie af en is gepiekt rond  $\omega = \omega_0$ . Dit heet *resonantie*. Bij niet al te grote demping (grote dempingstijd  $\tau$ ) zien we dat deze piek tamelijk scherp is. De waarden  $\omega$  waar het kwadraat van de amplitudo (maat voor intensiteit) nog maar de helft is worden gegeven door

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \frac{\omega^2}{\tau^2} \quad \text{of} \quad 2\omega_0 |\omega_0 - \omega| \approx \frac{\omega_0}{\tau}.$$

De tweede uitdrukking is een benadering waar het verschil  $|\omega_0 - \omega| \ll \omega$ . We zien dan dat de breedte van de piek bij halve intensiteit gegeven wordt door

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (205)$$

Bij resonantie is de fase  $\delta = \pi/2$ . Bij frequenties  $\omega < \omega_0$  is de fase kleiner dan 90 graden, bij frequenties  $\omega > \omega_0$  groter.