## Opgave 5.1

(a) Leidt de uitdrukking voor $\mathcal{E}(\lambda, T)$ af uit die voor $\mathcal{E}(f, T)$ gebruikmakend van

$$\mathcal{E}(\lambda, T)\, d\lambda = \mathcal{E}(f, T)\, df.$$

**(oplossing)**
Gebruik $df = d(c/\lambda) = (c\lambda^2)\, d\lambda$.

(b) Gebruik bijvoorbeeld Mathematica om de Planck curve als functie van $y = \lambda\, kT/hc$ te plotten.

**(oplossing)**
Als functie van deze variable krijgen we $\mathcal{E}(y, T)\, dy = \mathcal{E}(\lambda, T)\, d\lambda$ met

$$\mathcal{E}(y, T) = \frac{8\pi\,(kT)^4}{(hc)^3}\,\frac{1}{y^5}\,\frac{1}{\left(e^{1/y} - 1\right)},$$

(c) Bepaal de waarde $y_{\max}$ van het maximum en leidt de uitdrukking voor de $\lambda_{\max} T$ af. Check de numerieke waarde in mks eenheden.

**(oplossing)**
Het maximum ligt bij $d\mathcal{E}/dy = 0$,

$$\left(-\frac{5}{y^6}\right)\left(e^{1/y} - 1\right) - \left(\frac{1}{y^5}\right)\, e^{1/y}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = 0,$$

$$y = \frac{e^{1/y}}{5\left(e^{1/y} - 1\right)} = \frac{1}{5\left(1 - e^{-1/y}\right)}.$$

Dit ligt niet zo ver van $y = 0,2$. Door nu 0,2 in de rechteruitdrukking te substitueren krijgen we een betere schatting van $y$,

$$y = \frac{0,2}{\left(1 - e^{-5}\right)} = 0,2014,$$

Desgewenst kan het nog een keer geïtereerd worden, maar dat levert bij bovenstaande nauwkeurigheid (4 decimalen) niets nieuws meer op. De Convergentie gaat heel snel, omdat $e^{-5}$ al een erg klein getal is. We vinden dus

$$\lambda_{\max} T = 0,2014\,\frac{hc}{k} = 2,9 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}.$$

## Opgave 5.2

(a) Gebruik

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

om te laten zien dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n = \frac{x}{(1 - x)^2}.$$

en leidt hiermee de gemiddelde energie voor fotonen met een bepaalde frequentie af.

**(oplossing)**
Differentieer de beginuitdrukking en vermenigvuldig met $x$. Zie verder kader in tekst.

(b) Beredeneer dat het uitgezonden vermogen per $\mathrm{m}^2$ van een zwarte straler gelijk is aan $c\,\mathcal{E}$.

(c) Gebruik

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^3}{e^x-1}=\frac{\pi^4}{15}$$

om te laten zien dat de Stefan-Boltzmann constante gelijk is aan

$$\sigma=\frac{8\,\pi^5\,k^4}{15\,h^3c^2}.$$

**(oplossing)**
Dit betekent niets anders dan overal $f$ vervangen door $x=hf/kT$, d.w.z. $f=x\,kT/h$. Als check is eenvoudig na te gaan dat inderdaad $[\sigma]=\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.

(d) Gebruik

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^2}{e^x-1}=2\,\zeta(3)\approx 2,404$$

om een uitdrukking voor de dichtheid van fotonen in een zwarte straler af te leiden.

**(oplossing)**
De dichtheid van fotonen per frequentie-interval en per volume is gelijk aan $\mathcal{N}(f,T)=\mathcal{E}(f,T)/hf$, dus

$$\mathcal{N}(f,T)=\frac{8\pi\,f^2}{c^3}\,\frac{1}{e^{hf/kT}-1}.$$

Hieruit vinden we na integratie over frequentie de dichtheid

$$\mathcal{N}(T)=\gamma\,T^3\quad\text{met}\quad\gamma=16\pi\,\zeta(3)\left(\frac{k}{hc}\right)^3\approx 60,4\times\left(\frac{k}{hc}\right)^3.$$

Het numerieke resultaat is $\gamma\approx 2,03\times10^7\ \mathrm{m}^{-3}$. Voor het heelal met een temperatuur van 2,725 K vinden we ongeveer 410 fotonen/$\mathrm{cm}^3$.

## Opgave 5.3

(a) Beschouw een mens als een volume met constante temperatuur. Bereken de uitgezonden energie per seconde en per oppervlakte van een mens bij lichaamstemparatuur.

**(oplossing)**
Het vermogen per oppervlakte is bij $T=309$ K (36 graden Celsius)

$$I=\sigma\,T^4\approx 520\ \mathrm{W/m}^2.$$

(b) Als de lichaamstemperatuur gelijk zou zijn aan de omgevingstemperatuur, dan zou er geen energietransport zijn. Gebruik dit om de opgenomen energie uit de omgeving te schatten bij 20 graden Celsius.

**(oplossing)**
De opgenomen energie per seconde per oppervlakte is bij $T = 293$ K gelijk aan $I \approx 420$ W/m$^2$.

(c) Bereken uit het verschil het vermogen van een mens. Klopt dit een beetje?

**(oplossing)**
Beschouwen we de mens als een tonnetje met volume 75 liter, dan is dus $V = \pi\, r^2\, h$ $= 75$ dm$^3$. Nemen we een straal van $r = 0,12$ m, dan krijgen we $h = 1,66$ m. Het oppervlak is dan $O = 2\pi\, r\, h + 2\pi\, r^2 =$ 1,3 m$^2$. Het verschil tussen (a) en (b) is ca. 100 W/m$^2$. Dus het vermogen is zo'n 130 W, exact de goede orde van grootte. De ruststofwisseling is ca. 75 W, een vermogen van 130 W correspondeert met lichte arbeid. Boven 200 W betekent grote inspanning, waarbij warmteafvoer inderdaad een belangrijk issue is.

## Opgave 5.4

Schat de (constante) dichtheid van materie (in kg/m$^3$ en in aantal protonen per cm$^3$) zoals die uit de rotatiekromme van M33 volgt.

**(oplossing)**
We kunnen bijvoorbeeld de massa binnen een straal van $R = 10$ kpc $\approx 3 \times 10^{20}$ m berekenen. Die is gelijk aan $M = v^2(R)\, R/G$ (met $G \approx 6,7 \times 10^{-11}$ m$^3$ kg$^{-1}$s$^{-2}$). Voor de lichtgevende massa vinden we uit $v(R) \approx 45 \times 10^3$ m/s als resultaat $M_{\text{lichtgevend}} \approx 1 \times 10^{40}$ kg en voor het totaal met $v(R) \approx 120 \times 10^3$ m/s vinden we $M_{\text{totaal}} \approx 7 \times 10^{40}$ kg. Dus voor de donkere materie vinden we $M_{\text{DM}} \approx 6 \times 10^{40}$ kg. Delen door het volume, $(4\pi/3)R^3 \approx 1,1 \times 10^{62}$ m$^3$ geeft een dichtheid

$$\rho_{\text{DM}} \approx 5 \times 10^{-22} \text{ kg/m}^3$$

of met $m_p \approx 1,6 \times 10^{-27}$ kg, een dichtheid $\rho_{\text{DM}} \approx 0,3$ protonen/cm$^3$. Merk overigens op dat de donkere materie zeker niet uit protonen bestaat, maar op deze manier is het een beetje te vergelijken met de dichtheid van de interstellaire materie, die bijvoorbeeld in de schijf van het melkwegstelsel van de orde van 5 protonen/cm$^3$ is.