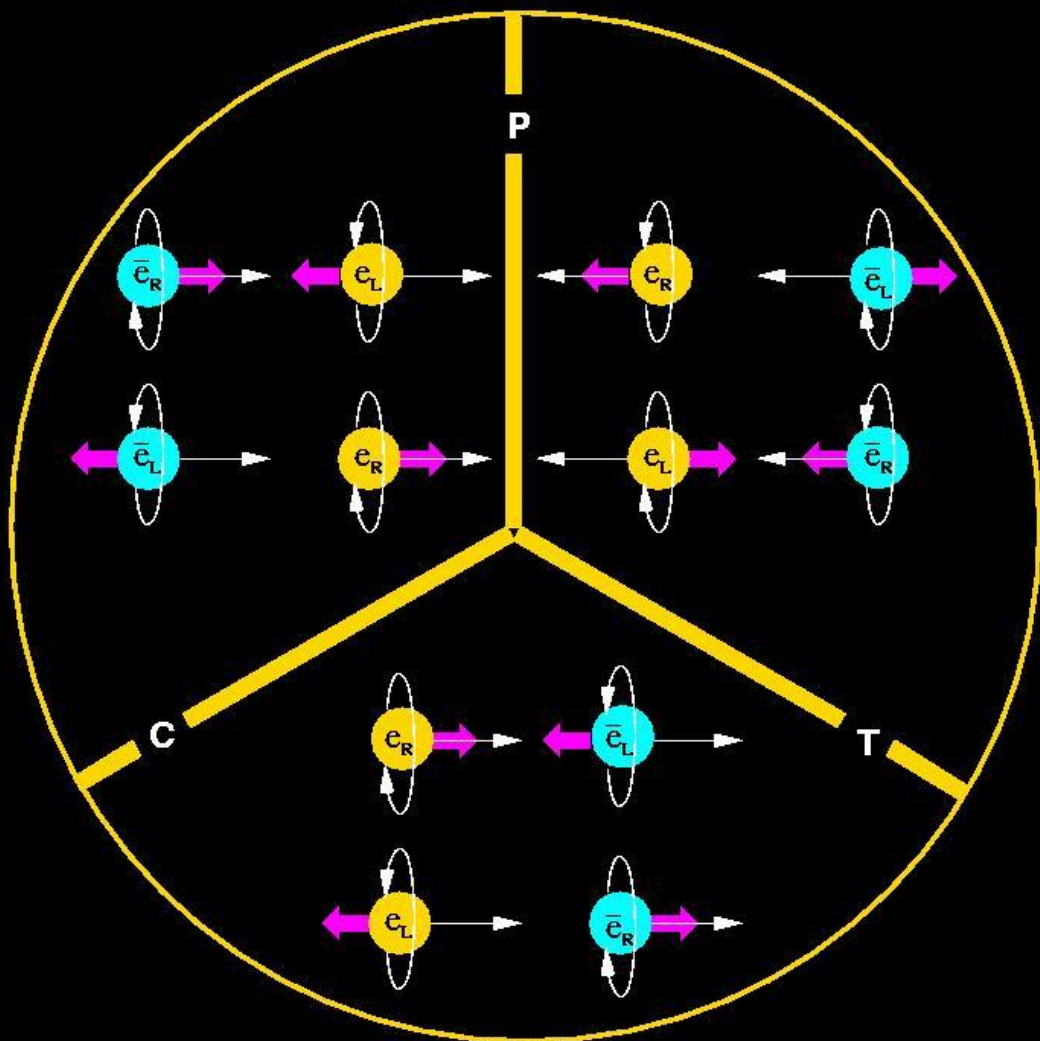


Van atoom tot kosmos

Wie het kleine niet eert ...

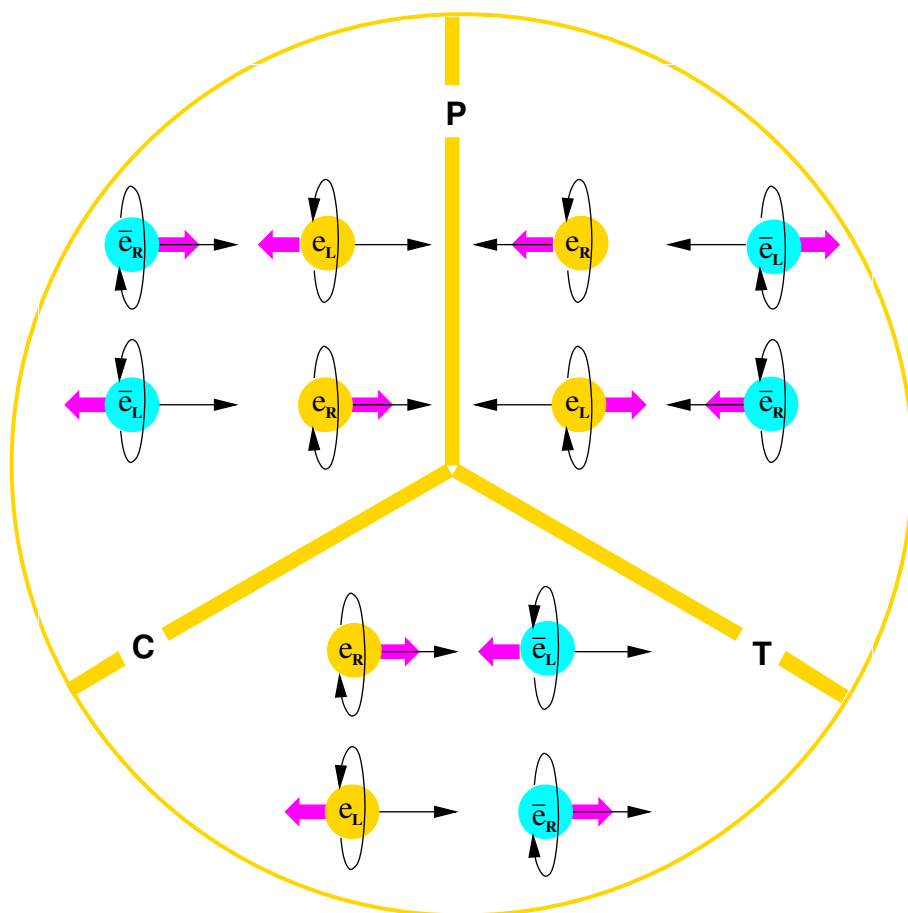
Piet Mulders



VAN ATOOM TOT KOSMOS

Wie het kleine niet eert ...

Piet Mulders



Piet Mulders
Nationaal Instituut voor Subatomaire Fysica (Nikhef),
Faculteit Betawetenschappen, Vrije Universiteit (VU)
Amsterdam

ISBN 978-90-812928-25

Herziene en uitgebreide uitgave inclusief extra materiaal als opgaven met oplossingen

Reprografie

huisdrukkerij VU, januari 2025

Inhoudsopgave

1	Inleiding	9
1.1	Kwantum en relativiteit als norm	9
1.2	De maat der dingen	11
1.3	Plan van aanpak	13
2	De basis concepten	17
2.1	Symmetrie	17
2.2	Ruimte en Tijd	18
2.3	Energie en impuls	22
2.4	Meer dimensies; rotaties en impulsmoment	26
2.5	Eenheden	27
2.6	Krachten	30
3	Het theoretische fundament	33
3.1	Speciale relativiteitstheorie	34
3.2	Kwantummechanica	37
3.3	Kwantumveldentheorie	44
3.4	Algemene relativiteitstheorie	47
4	Wie het kleine niet eert . . .	49
4.1	Atomen	50
4.2	Atoomkernen	55
4.3	Nucleonen	60
4.4	Baryonen en Mesonen	64
4.5	Generaties van deeltjes en antideeltjes	66
5	De magie van drie	71
5.1	De discrete CPT symmetrieën	72
5.2	Continue symmetrieën in het SM	76
5.3	De multiplet structuur in het SM	79
5.4	Krachtdeeltjes in het SM	81
5.5	Kwantum verstrengeling in het SM	86
5.6	De ijkveldentheorie en het Higgs mechanisme	90
5.7	Het fundament van het SM	93

6	Met vereende krachten	97
6.1	Gravitatie en kromming van ruimte-tijd	97
6.2	Zwarte gaten	101
6.3	De niet-abelse ijktheorieën	103
6.4	Waar zijn al de zware quarks gebleven?	105
6.5	De zware en lichte krachtdeeltjes	107
6.6	De relatieve sterkte van de krachten	109
6.7	De breking van discrete symmetrieën	111
7	Het ongrijpbare neutrino	117
7.1	Waar komen neutrino's vandaan?	117
7.2	Neutrino oscillaties.	119
7.3	Consequenties van massieve neutrino's	121
8	De geschiedenis van het heelal	125
8.1	De oerknal	125
8.2	De temperatuur van het heelal	129
8.3	Kosmische straling	132
9	Samen meer: complexiteit	135
10	Nog wat extra materiaal	141
10.1	Inleiding	142
10.2	De basis concepten	142
10.2.1	Niet-commuterende rotaties	142
10.2.2	Energie en onze atmosfeer	143
10.2.3	Klassieke gravitatiebanen	144
10.2.4	Potentialen in ruimte voor willekeurige dimensies	145
10.3	Het theoretisch fundament	147
10.3.1	Diagrammatische representatie van snelle trein in tunnel	147
10.3.2	Kwantisatie van impulsmomenten	149
10.3.3	De Einstein-Podolski-Rosen paradox	150
10.4	Wie het kleine niet eert	152
10.4.1	Pakkingsgraad van enkele kristalroosters	152
10.4.2	Kwantisatie in het waterstofatoom	154
10.4.3	Kwantisatie van de harmonische oscillator	155
10.4.4	Kwantisatie van de lineaire potentiaal	156
10.4.5	Kwantumtoestanden in atoomkernen	158
10.4.6	Quark substructuur van baryonen en mesonen	158
10.4.7	Paar creatie en annihilatie in deeltjesbotsingen	161
10.4.8	Hadronen met charm quarks	161
10.4.9	Het magnetisch moment van nucleonen	162
10.5	De magie van drie	164
10.5.1	Spiegelen van magneten	164
10.5.2	Annihilatie en emissie bij krachtdeeltjes	164
10.5.3	Vervalsmogelijkheden van vreemde quarks	165
10.5.4	Metingen aan verstrengelde toestanden	165
10.6	Met vereende krachten	166

10.6.1	Bewegen in gekromde ruimte	166
10.6.2	Elementaire analyse van grootheden met G	166
10.7	Het ongrijpbare neutrino	167
10.8	De geschiedenis van het heelal	167
10.8.1	Lichtemissie van ‘zwarte stralers’ met temperatuur T	167
10.8.2	Het aantal fotonen per cm^3 in de kosmos	168
10.8.3	Het menselijk lichaam als ‘zwarte straler’	169
10.8.4	Dichtheid van donkere materie uit rotatiecurves	169
10.9	Samen meer: complexiteit	170

Voorwoord

De materie om ons heen bestaat uit atomen en moleculen, netjes gerangschikt of juist chaotisch verdeeld in gassen, vloeistoffen of vaste stoffen of vormen en combinaties daar ergens tussen in. Om de structuur van die materie om ons heen te begrijpen zijn krachten essentieel. We komen een heel eind met zwaartekracht op macroscopisch niveau en elektromagnetische krachten als bindende krachten op microscopisch niveau. Maar daaronder gaat een fascinerende wereld schuil van subatomaire deeltjes, de wereld van de quarks waaruit de protonen en neutronen in atoomkernen zijn opgebouwd, de wereld van de elektronen en die van de neutrino's. Neutrino's zijn naast de fotonen of lichtdeeltjes de deeltjes waar het heelal mee doordrenkt is, tenminste het waarneembare heelal. In dit verhaal komen die deeltjes en hun onderlinge krachten ter sprake, de bouwstenen in wat bekend staat als het standaardmodel van de elementaire deeltjes. Gedurende de al weer meer dan 50 jaar dat het model bestaat hebben wereldwijde onderzoeksinspanningen onderliggende concepten bevestigd. We zullen ons hier voornamelijk beperken tot de wereld die we via observeren en experimenteren hebben leren kennen, een wereld met drie ruimterichtingen en één tijdrichting. Het vinden en begrijpen van patronen en symmetrieën in deze wereld is de essentie van ons huidige standaardmodel van de elementaire deeltjes. Het nadenken over meer dimensies, omdraaien van tijd, of complexe wiskundige inbedding kan ons daarbij helpen, als we de basis maar in het vizier houden.

De opzet van de gekozen beschrijving wijkt wat af van die in veel andere boeken of artikelen over materie en krachten. Er is gekozen voor de presentatie van huidige inzichten en niet van de vaak lange en moeizame weg via welke de kennis is verworven. Die historische lijn is zeker belangrijk, maar ook op veel manieren terug te vinden. Ook de theoretische en experimentele inspanningen die nodig waren om de kennis te verwerven en ideeën te testen komen niet tot hun recht. Die inspanningen zijn zo groot dat de verworven kennis er soms in ondergesneeuwd raakt. Voor deze aspecten kan de geïnteresseerde lezer vele boeken vinden of te rade gaan bij een schier oneindig aantal webpagina's.

Wat niveau betreft is een basiskennis van wiskundige en natuurkundige begrippen onmisbaar. Wikipedia kan hier soms uitkomst bieden. Sommige kaders en opgaven zijn toegevoegd als extra materiaal, maar zijn soms wat aan de pittige kant. Uit eigen ervaring merk ik echter dat er, juist bij velen die in deze onderwerpen geïnteresseerd zijn, veel behoefte bestaat aan enige diepgang, of het nu gaat om geïnteresseerde leken, amateursterrenkundigen, scholieren, studenten, wetenschappers in andere disciplines maar ook collega natuurkundigen waaronder leraren.

Piet Mulders
januari 2025

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Kwantum en relativiteit als norm

Hoe ziet de wereld van het kleine er uit. Het echte bekijken houdt al snel op. Zelfs met de beste lichtmicroscop kunnen we geen details zien die kleiner zijn dan de golflengte van het gebruikte licht. Voor zichtbaar licht is dat zo'n 0,4 tot 0,8 μm (micrometer). We kunnen natuurlijk licht met een kleinere golflengte gebruiken, maar dan hebben we het feitelijk niet meer over de wereld 'zien', maar wordt het 'een beeld van de wereld construeren'. Wanneer we de wereld van de atomen binnengaan dan is dat precies wat er gebeurt. We maken er daar dan ook dankbaar gebruik van dat bijvoorbeeld elektronen, die we macroscopisch als deeltjes ervaren, zich op een schaal die klein genoeg is ook manifesteren als kwantummechanische golven. Anders geformuleerd, de informatie over de positie van elektronen wordt gecodeerd met een functie afhankelijk van plaats en tijd. Deze golffuncties zijn vaak zelfs geen (gewone) reële getallen meer, maar de functiewaarden zijn complexe getallen waarvan de fase oscilleert in de tijd met een frequentie $f = E/h$, bepaald door de energie E van het elektron en waarvan de fase daarnaast ook nog oscilleert in de ruimte met een golflengte $\lambda = h/p$, bepaald door de impuls p . Voor een niet al te snel deeltje is de impuls gelijk aan massa maal snelheid ($p = mv$). In het kader op de volgende pagina is wat meer te vinden over frequentie en golflengte. In de relaties komen we h , de constante van Planck, tegen. Uitgedrukt in alledaagse eenheden is dat een enorm klein getal,

$$h = 6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ Js.}$$

We komen hieronder terug op deze manier van noteren van, in dit geval heel kleine, getallen, net als op de eenheden, hier Joule-seconde. De kwantummechanica speelt in de alledaagse wereld overigens nauwelijks een rol, maar in de wereld van moleculen, atomen en kleiner speelt die juist de centrale rol, zoals we zullen gaan zien.

Voor lichtdeeltjes zijn bovendien energie E en impuls p nog eens gerelateerd via de lichtsnelheid, $E = pc$ (ook hier komen we op terug), waar c de snelheid van het licht is,

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s,}$$

afgerond 300 000 km/s. Deze relatie tussen E en p betekent dat ook de golflengte en frequentie van lichtgolven gerelateerd zijn, namelijk $f = c/\lambda$, een relatie die niet alleen geldt voor lichtgolven maar voor alle vormen van elektromagnetische straling, zoals (geordend

Trillingstijd en frequentie; golflengte en golfgetal

Voorbeelden van oscillerende functies zijn de sinus of cosinus ($\sin \varphi$ of $\cos \varphi$) of voor wie daarmee vertrouwd is complexe e-machten ($e^{\pm i\varphi}$). Het argument (φ) geeft de *fasehoek* van de oscillaties. Die fasehoek of kortweg *fase* loopt in radialen van 0 tot 2π (in graden is dat van 0 tot 360 graden). Voor oscillaties in de tijd (t) is de fase

$$\varphi = 2\pi \frac{t}{T} = 2\pi ft = \omega t,$$

waar T de *trillingstijd* is; $f = 1/T$ is de *frequentie* en $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ is de *hoekfrequentie*. Voor oscillaties in de ruimte (bijvoorbeeld langs de x -richting) is de fase

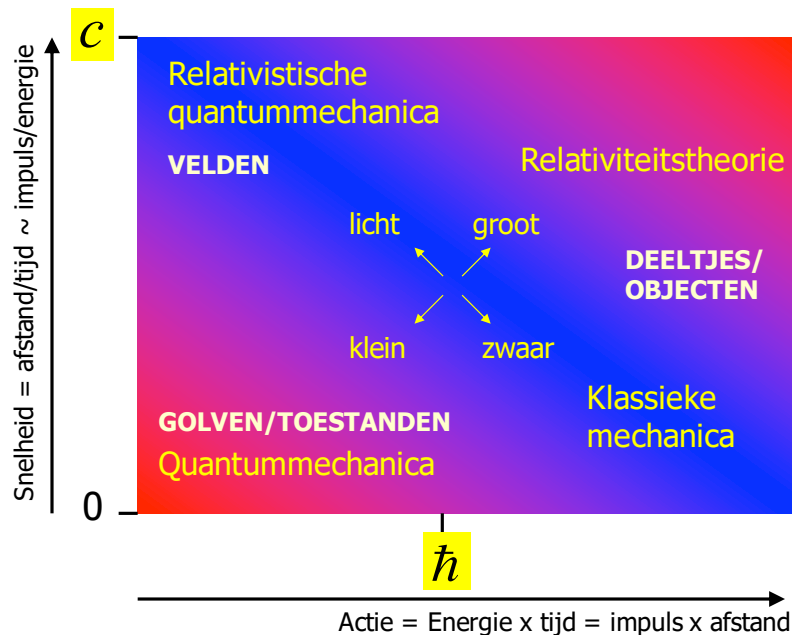
$$\varphi = 2\pi \frac{x}{\lambda} = kx,$$

waar λ de *golflengte* is; $k = 2\pi/\lambda$ heet het *golfgetal*.

Omdat hoekfrequentie ω en golfgetal k vaak handiger in gebruik zijn dan frequentie f of golflengte λ , is het natuurlijker om de constante van Planck h gedeeld door 2π te gebruiken, genoteerd als $\hbar = h/2\pi$. Voor een kwantummechanische golf functie hebben we de belangrijke koppeling van energie en impuls met hoekfrequentie en golfgetal, $E = \hbar\omega$ en $p = \hbar k$.

naar steeds kortere golflengtes) radiogolven, infraroodstraling, zichtbaar licht, ultraviolette straling en röntgenstraling. Het golfkarakter van licht verraadt zich in interferentieverschijnselen. Dat licht ook een deeltjeskarakter heeft is gebleken uit het befaamde foto-elektrisch effect, waaruit bleek dat, gebruikmakend van licht met een bepaalde frequentie f , het alleen mogelijk was om energie over te dragen als pakketjes of kwanta ter grootte van hf . Dat betekent dat om elektronen uit een atoom vrij te maken de hoeveelheid licht niet de bepalende factor is maar dat we licht moeten gebruiken met een frequentie die hoog genoeg zodat hf groter is dan de bindingsenergie.

Vergelijking van grootheden met de constante van Planck h , de lichtsnelheid c of combinaties hiervan geven een goede eerste indicatie van waar we naar toe moeten voor een adequate beschrijving van de wereld. Met licht en elektromagnetische golven zijn we in het voorgaande al meteen in de wereld van de kwantummechanica én de relativiteitstheorie terecht gekomen. In de wereld van alledag hebben we meer te maken met de klassieke mechanica waar we met de wetten van Newton uit de voeten kunnen. Dat wordt geïllustreerd in figuur 1.1 waar in verticale richting de karakteristieke snelheden lopen van nul tot de lichtsnelheid en waar langs de horizontale richting de grootte *actie* staat, ruwweg het product van massa $\times$ snelheid $\times$ afmeting wat ook een maat is voor de hoeveelheid draaiing of het impulsmoment van een systeem; deze grootte kunnen we mooi vergelijken met de constante van Planck. Dus, in het gebied rechts onderaan is de snelheid klein vergeleken met de lichtsnelheid c terwijl de actie juist heel groot is vergeleken met de constante van Planck h . Bijvoorbeeld voor een vallende draaiende bal met snelheid 1 m/s is snelheid enorm veel kleiner dan c terwijl het impulsmoment van de orde van 0,1 Js enorm veel groter is dan h . Wanneer we deze hoek in de figuur verlaten en te maken hebben met systemen waarvan de afmetingen, snelheden en energieën in geschikte combinaties van de orde van grootte van h en/of c worden, dan zijn we aangewezen op de volledige theoretische beschrijving om te begrijpen wat er gebeurt. Het



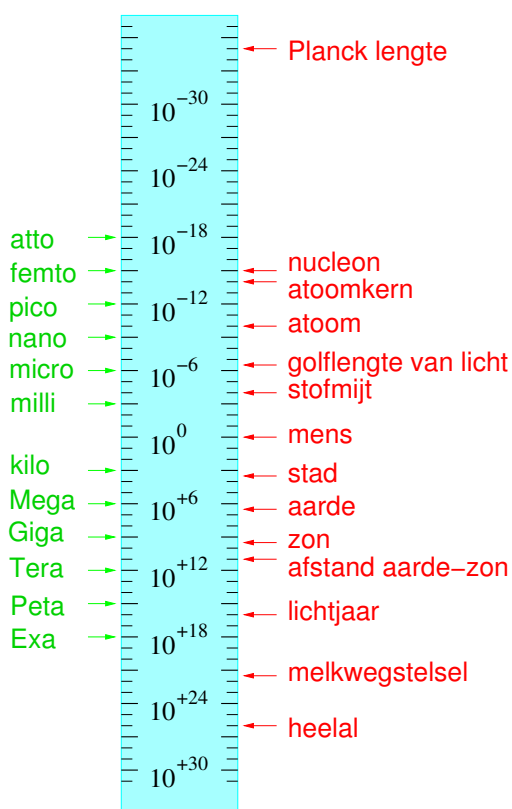
Figuur 1.1: Wanneer is welke beschrijving van belang? In het diagram is een globale opdeling te zien in een aantal domeinen. Welke beschrijving, klassieke mechanica, kwantummechanica, relativiteitstheorie of allebei, de juiste is wordt bepaald door de karakteristieke afmetingen, energieën en snelheden in een systeem in vergelijking met de lichtsnelheid (c) en met de constante van Planck ($\hbar$).

is noodzakelijk om kwantummechanica te gebruiken wanneer combinaties van grootheden kleiner of vergelijkbaar worden met de constante van Planck. Relevante actie grootheden zijn hier naast impulsmoment bijvoorbeeld energie $\times$ tijd of impuls $\times$ afmeting. Dat blijkt het geval te zijn bij licht, maar ook bij zwaardere deeltjes die kort leven. Of, als het impulsmoment klein is, zoals voor elektronen in atomen. In de verticale richting in het diagram, gaat het om de snelheid die ook correspondeert met de verhouding van impuls en energie. Al deze zaken zullen we nog verder gaan uitdiepen, maar het is soms handig om een kwalitatieve indruk te krijgen waar een systeem thuishoort. De kwalificaties licht-zwaar en klein-groot zijn dan ook relatief.

1.2 De maat der dingen

In de inleiding hebben we een voorproefje gezien van de getallen die ons te wachten staan. We gebruiken machten van 10 om grote en kleine getallen weer te geven, bv. $1000 = 10^3$, $1/1000 = 0,001 = 10^{-3}$ en $1 = 10^0$, waar de getallen 3, -3 en 0 de exponenten heten. Zo zitten er ruim 30 000 000 seconden $= 3 \times 10^7$ s in een jaar en is de lichtsnelheid c ongeveer 3×10^8 m/s. Het aantal atomen in 12 gram koolstof is maar liefst het nauwelijks te bevatten getal 6×10^{23} (1 Mol), wat bekend staat als het getal van Avogadro.

Voor afmetingen is de meter, passend bij de afmetingen van ons lichaam, een vanzelfsprekende standaard, $1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m} = 1 \text{ km}$ geeft de orde van grootte van een dorp, $1\,000\,000 \text{ m} = 1000 \text{ km}$ is al bijna de orde van grootte van de hele Aarde. Weer drie ordes meer, 1 miljoen (10^6) km of 10^9 m zijn we de Maan al voorbij. Dit is ook zo ongeveer de afmeting van de Zon. Een lichtjaar, de afstand die met de snelheid van het licht wordt afgelegd in een jaar is het product van de lichtsnelheid (in m/s) en het aantal seconden in een jaar, wat bij benadering 10^{16} m oplevert. Dat illustreert een van de mooie eigenschappen van exponenten, namelijk het product van 10^x en 10^y is 10^{x+y} . De afmeting van het ‘zichtbare’ heelal dat 15 miljard ($1,5 \times 10^{10}$) jaar oud is, heeft dan een afmeting van $1,5 \times 10^{26} \text{ m}$. Een aantal van deze afstanden zijn op de ‘exponentiele’ maatlat in



Figuur 1.2: Een ‘exponentiële’ meetlat van heel klein (boven) tot heel groot (onder), waarbij ieder streepje een factor 10 meer of minder voorstelt. Daarbij zijn de gebruikte voorvoegsels om de machten te benoemen gegeven. Het is gebruikelijk om de eerste letter te gebruiken, dus $1 \text{ fm} = 1 \text{ femtometer} = 10^{-15} \text{ m}$, m.u.v. *micro* waarvoor de Griekse letter μ wordt gebruikt, dus $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$. Het in kranten en tijdschriften veelgebruikte *mEuro* voor een miljoen Euro is dan ook niet in overeenstemming met het metrische systeem. Daar zou men ook eens gewoon aan de *M€* (een miljoen Euro’s), *G€* (1 miljard Euro’s) en *T€* (1 biljoen Euro’s) moeten wennen net als bij informatiedragers, waar iedereen wel netjes de *MByte*’s, *GByte*’s, *TByte*’s en *PByte*’s hanteert.

figuur 1.2 aangegeven. In een heelal waar de gemiddelde dichtheid niet groter is dan zo’n 1 atoom/m^3 , levert dit toch het onmetelijke aantal van 10^{79} atomen op.

In de richting van het kleine belanden we bij 10^{-10} m bij het atoom. De protonen en neutronen in de atoomkernen zijn niet groter dan 10^{-15} m . Zo ongeveer de kleinste denkbare afstand, de Planck lengte, komen we later nog tegen. Een groot deel van dit verhaal speelt zich af tussen de 10^{-10} en 10^{-21} m .

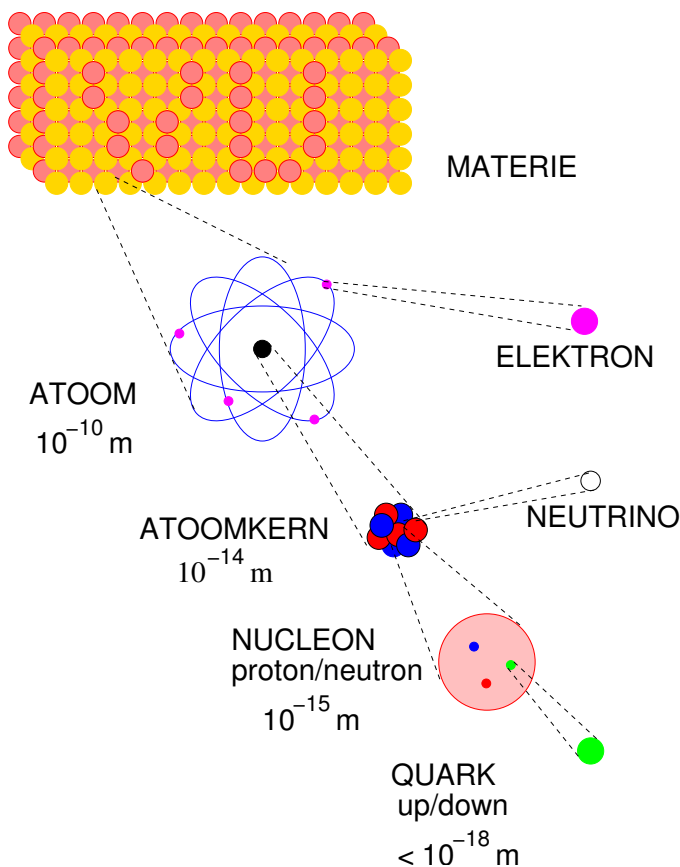
Laten we even een gedachtenexperiment doen rondom de ‘oerknal’. Na 5 seconden was het heelal $1,5 \times 10^9 \text{ m}$ groot, 17 ordes van grootte kleiner dan nu. De gemiddelde afstand tussen de atomen in het heelal is nu 1 m . Eenvoudige schaling zou betekenen dat de afstand na 5 s van de orde van 10^{-17} m was, twee ordes van grootte kleiner dan zelfs maar de kern van het atoom. Deze manier van schaling is natuurlijk veel te naïef en houdt geen rekening met heel veel andere zaken zoals deeltje-antideeltje creatie of vernietiging. Desalniettemin maakt zo’n schaling duidelijk dat in de processen van het vroege heelal de formatie van deeltjes met afmetingen zoals atomen, atoomkernen, neutronen en protonen, een belangrijke schakel is waarbij krachten of wisselwerkingen op subnucleaire afstanden van minder dan 1 femtometer een essentiële rol moeten hebben gespeeld.

Wat gebeurt er daar dan precies? Soms krijg je te horen dat je dat als klassiek wezen niet kunt vragen met betrekking tot een kwantumwereld. Maar wat is dan wel de juiste vraag? Dat gaan we proberen uit te leggen. Je zou het kunnen verstoppen in een beschrijving, waarbij ‘multi-verses’ alles bevatten wat buiten het ‘universum’, onze wereld, gebeurd is, gebeurt of kan gebeuren. Dat is zoiets als de schrijfmachine, die in potentie de wereldliteratuur in zich heeft. Maar het is wel de basis onder bijvoorbeeld kwantumveldentheorieën, waar het *vacuum* alle symmetrieën van de wereld heeft. Het is het nulpunt (0), van waaruit je zowel de positieve of negatieve kant op kunt gaan

en waarvoor, omdat we kunnen vermenigvuldigen, ± 1 representatieve getallen zijn. Het getal -1 is het complement van $+1$ onder optelling. Vermenigvuldigen, geschreven als $a \times b = ab$, impliceert verder dat uit $ab = 0$ volgt dat of $a = 0$ of $b = 0$ (formeler gezegd: *nuldelers* bestaan niet). Dat impliceert ook dat als a ongelijk aan nul is ($a \neq 0$) er een *inverse* a^{-1} of $1/a$ bestaat zodat $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ of dat uit $ab = c$ volgt dat $a = c/b$. Als we ‘getallen’ veralgemeniseren hoeft vermenigvuldiging overigens niet te betekenen dat verwisseling geoorloofd is, formeler gezegd dat de commutator $[a, b] = ab - ba = 0$. Voorbeelden van bewerkingen of operaties die je wel na elkaar kunt toepassen maar niet zomaar kunt verwisselen zijn rotaties. De meest gebruikelijke manier om met dat soort grootheden te werken is door a en b dan te zien als operatoren of matrices, waar we nog op terugkomen. Zelfs de eigenschap dat de volgorde van ‘vermenigvuldigen’ er niet toe doet, $(ab)c = a(bc)$, formeler *associativiteit*, is niet vanzelfsprekend, al werkt dat wel voor matrices. Matrices worden behalve voor rotaties ook in de kwantumwereld veel gebruikt, de Heisenberg matrixmechanica. Met getallen kunnen bovenstaande spelletjes ook, maar dan moet je je verdiepen in de intrigerende wereld die naast de ‘gewone’ reële getallen $\mathbb{R}$ werkt met complexe getallen $\mathbb{C}$, uitgebreid naar quaternions (die je niet meer mag verwisselen) en tenslotte naar octonions (waar ook de volgorde van uitvoeren van belang is). Ik wil hier verwijzen naar een prachtig artikel van de hand van John Baez [John C. Baez, *The octonions*, Bulletin of the American Mathematical Society 39, 2 p. 145-205]. Dit wordt belangrijk bij beschrijven van elementaire deeltjes, waar we naast 2-voudige symmetrieën, zoals positief/negatief of links/rechts ook verschillende 3-voudige symmetrieën zien, zoals ruimte-richtingen of kleurladingen van deeltjes. Het bovenstaande is voor de lezer waarschijnlijk acabadabra, maar ik laat het toch zien omdat het een aantal begrippen de revue laat passeren zoals wiskundige bewerkingen, definities van inverse en commutator of eigenschappen als associativiteit. Ik wil daarmee het belang benadrukken om bij wiskundige manipulaties goed in de gaten te houden wat voor objecten of grootheden worden beschreven en wat de bewerkingen zijn die je er mee kunt doen.

1.3 Plan van aanpak

Het plan van aanpak in dit werk komt voort uit de realisatie dat de wereld niet direct eenvoudig is als je naar verschijnselen kijkt, iets wat de lezer na de eerste paragrafen van dit hoofdstuk waarschijnlijk zal beamen. Maar toch is er in de wereld en de opbouw van de materie (zie figuur 1.3) een enorme uniformiteit, overigens net als een enorme diversiteit, Maar naarmate we naar details gaan wordt de diversiteit de steeds rijkere combinatoriek van een meer uniforme set van vrijheidsgraden. Via het periodiek systeem der elementen komen we bij slechts enkele bouwstenen van de atomaire wereld. De relevante vrijheidsgraden zijn twee nucleonen, proton en neutron, en twee leptonen, elektron en neutrino. De nucleonen lijken in bepaalde opzichten veel op elkaar, maar er zijn ook belangrijke verschillen, bijvoorbeeld hun elektrische ladingen. In tegenstelling tot leptonen blijken de nucleonen op hun beurt weer opgebouwd uit meer fundamentele bouwstenen, de quarks. Terwijl nucleonen een afmeting hebben, is dat niet meer het geval voor de quarks en leptonen. Puntdeeltjes worden ze wel eens genoemd, maar beter is kwanta die de meest elementaire vrijheidsgraden vormen, met daarnaast een aantal kwanta die verantwoordelijk zijn voor krachten. Het geheel staat bekend als het standaardmodel van elementaire deeltjes. Via enkele tussenstappen en corresponderende hoofdstukken werken we daar



Figuur 1.3: *Alvast een vooruitblik naar de opbouw van de materie uit atomen, op hun beurt weer atoomkernen + elektronen. Atoomkernen zijn opgebouwd uit nucleonen, verzamelaar voor protonen met lading en neutronen zonder lading. Bij kernprocessen worden neutrino's geproduceerd. De nucleonen ten slotte zijn weer opgebouwd uit up en down quarks. De quarks en leptonen, de verzamelaar voor elektronen en neutrino's, vormen voor zover nu bekend de elementaire kwanta of deeltjes. In het standaardmodel van elementaire deeltjes worden drie families of generaties van quarks en leptonen beschreven en verder krachtdeeltjes, verantwoordelijk voor de krachten tussen de deeltjes.*

naar toe.

Zoals hierboven al gezegd, er is uniformiteit in elementaire kwanta, en daarmee samenhangend een rijkdom aan symmetrie. Dit vormt zelfs het leidende principe in de wereld van deeltjes. Vrijheidsgraden zijn kwantumtoestanden die verschillen op een aantal, soms abstracte, punten, bijvoorbeeld enkel via tegengestelde (positieve en negatieve) ladingen.. Een van de meest intrigerende symmetrieën is de verwisselingssymmetrie (*permutatie*) van twee identieke kwanta. Het blijkt dat verwisseling van twee identieke kwanta ($\bigcirc$ en $\bigcirc$) op twee manieren kan werken; *bosonen* versterken elkaar (net als $\bigcirc \bigcirc + \bigcirc \bigcirc$) en we kunnen ze stapelen, terwijl *fermionen* bij verwisseling elkaar juist uitsluiten (net als $\bigcirc \bigcirc - \bigcirc \bigcirc \rightarrow 0$, het Pauli uitsluitingsprincipe). Dat betekent dat we bosonen kunnen tellen, terwijl een fermion er is of er niet is. Wanneer we dit verwisselingsprincipe op twee op elkaar lijkende maar toch onderscheidbare kwanta (qubits $\triangle$ en ∇) toepassen zien we het begin van diversiteit, $\triangle \nabla + \nabla \triangle$ is zoals het werkt voor bosonen en $\triangle \nabla - \nabla \triangle$ is zoals het werkt voor fermionen; voor bosonen bestaan dus ook toestanden $\triangle \triangle$ en $\nabla \nabla$.. Globaal kunnen we zeggen dat de fermion vrijheidsgraden de bouwstenen vormen en de boson vrijheidsgraden de krachtdeeltjes. Merk op dat we hier zonder verdere uitleg (komt nog wel) kwanta combineren als vermenigvuldiging en bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken, iets wat mag in de kwantumwereld, maar dan wel volgens strikte regels.

In hoofdstuk 2 gaan we eerst aan de slag met de basis concepten, ruimte, tijd, energie, beweging en impuls, rotaties en impulsmoment, de eenheden hiervoor en tenslotte krachten. Deze begrippen spelen een rol in onze alledaagse wereld met voornamelijk de

klassieke mechanica, maar ook in de kwantummechanica of relativiteitstheorie. In alle domeinen zijn er directe verbanden tussen behouden grootheden, energie, impuls en impulsmoment en de symmetrie in een bepaald systeem. Symmetrie blijkt een centrale rol te spelen, beginnend met symmetrieën in ruimte en tijd.

In hoofdstuk 3 worden de grote theorieën besproken met nadruk op conceptuele aspecten. Dit zijn speciale relativiteitstheorie, kwantummechanica, kwantumveldentheorie en de algemene relativiteitstheorie. Vanuit de klassieke wereld is de speciale relativiteitstheorie misschien het meest opzienbarende omdat het aanpassingen vereist in het gedrag van alledaagse concepten, met name voor snelheden. Ik probeer uit te leggen waarom de kwantummechanica conceptueel veel ingrijpender is, terwijl daarna kwantumveldentheorie en algemene relativiteitstheorie weer natuurlijke follow-ups zijn. Kwantumgravitatie laten we staan als een nog geheel open vraag.

In hoofdstuk 4 wordt de opbouw van de materie, gegeven in figuur 1.3, in detail besproken, via moleculen, atomen naar atoomkernen en elektronen. De dominante krachten op macroscopisch niveau zijn gravitatie en elektromagnetisme. Van atoomkernen komen we naar nucleonen, protonen en neutronen met nieuwe krachten op korte afstanden, de sterke kernkracht en de zwakke kracht, bijvoorbeeld verantwoordelijk voor verval van een neutron in een proton + elektron + neutrino. Nucleonen op hun beurt zijn samengesteld uit quarks, anti-quarks en gluonen als krachtdeeltjes. Dan zijn we beland bij de op dit moment elementaire vrijheidsgraden, quarks en leptonen zonder afmetingen maar wel eigenschappen en ladingen die horen bij heel specifieke interne symmetrieën. Het Higgs-deeltje, de krachtdeeltjes en 3 families van quarks en leptonen complementeren het standaardmodel van de deeltjesfysica.

In hoofdstuk 5 wordt gepoogd de symmetrie van het standaardmodel te begrijpen door te kijken welke kwanta de meest elementaire zijn en hoe de eigenschappen zich gedragen in vereenvoudigde of extreme situaties. Zo kun je in plaats van de drie ruimterichtingen het geval van geen enkele of van één ruimterichting bekijken. Symmetrieën worden soms eenvoudiger, soms komen er nieuwe symmetrieën bij of er verdwijnen symmetrieën. Soms zijn er wel oplossingen in één dimensie en geen oplossingen in drie dimensies. Een systeem dat langs een lijn leeft kun je alleen schuiven, niet draaien. Op deze manier gaan we proberen ons inzicht in de symmetrieën van het standaardmodel te vergroten.

De latere hoofdstukken leggen de nadruk op bepaalde aspecten van de deeltjeswereld, zoals de wonderlijke wereld van neutrino's, gravitatie en kromming van ruimte-tijd, astrofysica en kosmologie, de multi-messenger aanpak of complexiteit.

Ook in het theater van de klassieke wereld speelt kwantummechanica een centrale rol en dan bedoel ik ruimte en tijd en beweging daarin. Zelfs een simpele bewegen langs een lijn in één ruimterichting of het draaien in een vlak gekarakteriseerd door twee ruimterichtingen is gekwantiseerd. Vaak is dat vanwege het macroscopische karakter van een systeem niet direct zichtbaar, maar pas op nanoschaal in de materie waar het gedrag van elektronen en lichtkwanta de toon zet in lasers, geleiders en halfgeleiders. In uitgekiende experimenten is duidelijk dat kwantummechanica ook over macroscopische afstanden belangrijk is.

Hoofdstuk 2

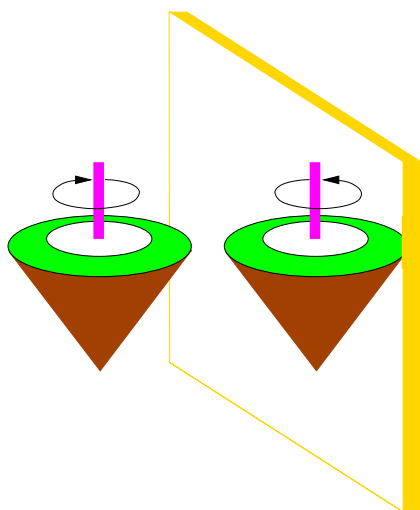
De basis concepten

Voordat we door de bomen het bos niet meer zien, even terug naar enkele basis concepten, zoals de ongrijpbare *tijd* en direct daarmee samenhangend *ruimte* of de begrippen *energie* en *impuls*. Maar voordat dat aan bod komt, ook een korte reflectie over het begrip *symmetrie* dat al heel vaak genoemd is. Symmetrie is namelijk in de klassieke mechanica verbonden met het behoud van grootheden (bekend als Noether's theorema). In de kwantummechanica betekent symmetrie dat golf functies slechts van elkaar verschillen met een complexe fase. De behouden grootheden worden ons uitgangspunt en we bespreken ook de eenheden die gebruikt worden zoals de seconde als tijdseenheid. Een eenheid is vooral een afspraak, maar het is belangrijk dat zulke afspraken niet tot tegenstrijdigheden leiden en dat is niet vanzelfsprekend. Veranderingen in (al dan niet behouden) grootheden zijn het gevolg van *wisselwerkingen* of *krachten* tussen of binnen systemen, waar systeem voor van alles kan staan, een simpel deeltje als een elektron, twee deeltjes of een samengesteld systeem zoals een atoom met atoomkern en een heleboel elektronen, of een ingewikkeld molecuul, DNA strengen of zelfs ons Zonnestelsel, het Melkwegstelsel of de hele kosmos.

2.1 Symmetrie

Symmetrieën spelen bij het begrijpen van de natuur een cruciale rol. Een bol is een voorbeeld van een object dat je kunt draaien zonder dat je iets ziet veranderen. Dat heet een rotatie-invariant object. Een kaarsrechte spoorlijn is een voorbeeld van een translatie-invariant systeem. We zien hier twee aspecten: de operatie, wiskundig ook wel transformatie genoemd, zoals draaien (rotatie) of verschuiven (translatie) en het al dan niet veranderen van het systeem. Bij afwezigheid van verandering spreken we van *invariantie*.

Perfekte symmetrieën zijn overigens niet zomaar zichtbaar. Denk aan de bol, bijvoorbeeld een biljartbal. Pas als je er een stip op gezet hebt om de symmetrie te *breken* maak je het boloppervlak 'zichtbaar'. En dan heb je nog steeds een symmetrie over corresponderend met rotaties om een as door dat punt en het middelpunt van de bol. Pas als je nog ergens een stip zet (en dat moet dan niet het tegenovergestelde op de bol zijn) is de symmetrie helemaal gebroken en kun je de posities ook karakteriseren. Denk maar aan de keuze van Greenwich naast de Noordpool om de nulmeridiaan op de Aarde vast te leggen. Op dat moment kun je alle punten vastleggen met twee coördinaten die per punt verschillen, maar dat neemt niet weg dat er nog steeds sprake is van symmetrie. Bijvoorbeeld, in ieder punt is de kromming hetzelfde omdat de afstand tot het middelpunt steeds



Figuur 2.1: *Het spiegelbeeld van een tol is weliswaar een tol, maar het spiegelbeeld van een rechtsom draaiende tol is een linksom draaiende tol.*

hetzelfde is.

Dat is echter niet het meest wezenlijke aan de symmetrie. Het bestaan van een symmetrie betekent niet dat alles ook symmetrisch moet zijn. Wat wel de essentie van een symmetrie is, is misschien het beste te illustreren met een eenvoudiger symmetrie, namelijk spiegelsymmetrie. Denk aan je eigen spiegelbeeld of het in figuur 2.1 geschetste spiegelbeeld van een tol. Van een draaiende tol is het spiegelbeeld op het eerste gezicht identiek. Echter, als de tol draait is er wel degelijk een verschil met het spiegelbeeld. De ‘tol in de spiegel’ draait andersom. Het wezen van spiegelsymmetrie is niet of beeld en spiegelbeeld identiek zijn, maar of beeld en spiegelbeeld beiden kunnen bestaan. Dat is in onze macroscopische wereld ook steeds het geval. In de wereld van alledag, maar ook in die van de atomen, moleculen en atoomkernen is spiegelsymmetrie een perfecte symmetrie. Dat sommige suikers een linksdraaiende moleculaire structuur hebben of dat het hart bij de meeste mensen aan de linkerkant zit doet daar niets aan af. In principe kan de andere situatie bestaan.

Zoals we zullen zien wordt de spiegelsymmetrie of links-rechts symmetrie wat subtieler op subatomair niveau. De symmetrie is er in sommige gevallen niet meer. Het lijkt nog goed te werken voor quarks en elektronen en dat klopt ook voor de elektromagnetische en sterke kernkrachten, maar wanneer we te maken krijgen met de zwakke kracht gaat het helemaal mis. Dat zullen we zien bij de opbouw van de materie. Het meest evident is de breking bij neutrino's. Terwijl quarks en leptonen in twee spintoe-standen voorkomen, links- en rechtshandig, komt het neutrino slechts linkshandig voor! Het ontbreken van het ‘spiegelbeeld’ duidt op de *breking* van de spiegelsymmetrie, ook wel *pariteitsschending van de zwakke wisselwerkingen* genoemd. In hoofdstuk 4 zullen we voor de elementaire bouwstenen diverse andere symmetrieën tegenkomen, zowel gebroken als ongebroken symmetrieën.

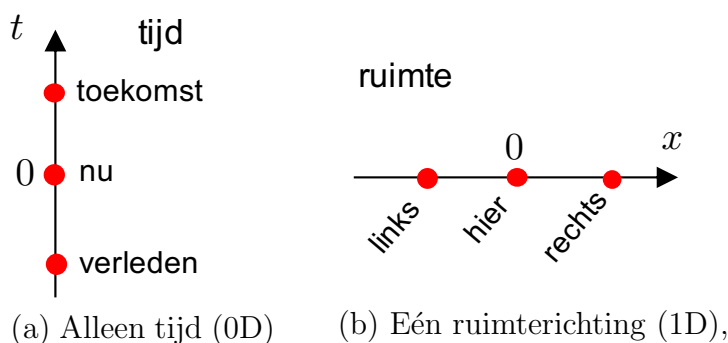
2.2 Ruimte en Tijd

Na deze summiere introductie van symmetrie, twee andere basis concepten, namelijk de ongrijpbare *tijd* en direct daarmee samenhangend *ruimte*. Ruimte en tijd vormen geen fysiek weefsel, een vergelijking die soms wordt gebruikt om zwaartekracht te illustreren, maar het is enkel een immaterieel coördinatensysteem, wat pas relevantie krijgt via

gebeurtenissen of *events*, voor de wereld om ons heen bijvoorbeeld vastgelegd via coördinaten $(t, \mathbf{r}) = (t, x, y, z)$ waar t de tijd-coördinaat is en $\mathbf{r} = (x, y, z)$ de ruimtelijke positie van het event is. Het combineert de drie-dimensionale (3D) Euclidische ruimte en vormt samen met de tijd de 1+3 dimensionale (4d) Minkowski ruimte. Het belangrijke in de ruimte is een karakterisering van een event ten opzichte van een ander event met een vector, gekenmerkt door een afstand (lengte van vector) en een richting of oriëntatie. Af en toe zullen we in plaats van $(t, \mathbf{r})$ de coördinaten kiezen als $(ct, \mathbf{r})$. Door de tijd met de lichtsnelheid te vermenigvuldigen hebben alle vier de coördinaten dan dezelfde eenheid/dimensie. Belangrijk is dat c hier enkel de rol speelt van een omrekeningsfactor. De coördinaten van de viervector worden ook wel genoteerd als $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Alvorens de ruimtelijke dimensies toe te voegen, beginnen we met de 0D situatie, waar we de ruimtelijke structuur even buiten beschouwing laten. We bekijken veranderingen in de tijd of proberen die te begrijpen. De gebeurtenissen of events worden dan gerangschikt langs een tijdlijn als in figuur 2.2 (a) met daarop in het bijzonder het tijdstip *nu*. De events zijn geordend van verleden naar toekomst, waarbij gebeurtenissen in het verleden invloed kunnen hebben op het *nu*, en het *nu* gebeurtenissen in de toekomst kan beïnvloeden, wat bekend staat als *causaliteit*. Tussen twee causale events ligt een tijdsinterval.

Het meten van tijdsintervallen is al door de eeuwen heen een ware kunst, gebaseerd op vergelijking met periodieke verschijnselen. Denk hierbij aan de dag-nacht cyclus gekoppeld aan de rotatie van de Aarde of de jaarcyclus gekoppeld aan de rotatie van de Aarde om de Zon. Tegenwoordig gebruiken we de frequentie van een foton geabsorbeerd of uitgezonden in een overgang tussen twee energieniveaus in een Cesium atoom in rust om de seconde vast te leggen. Voor één specifieke overgang in dit atoom is de frequentie van het uitgezonden foton vastgelegd als 9 192 631 770 trillingen per seconde, waarbij het verband met energie en golflengte van dat foton via de constante van Planck en de lichtsnelheid gebeurt, de in de inleiding al genoemde relatie $E = hf = hc/\lambda$, waarin de constanten h en c enkel als omrekeningsfactoren dienen. Het belangrijke bij het meten van de tijd is de reproduceerbaarheid oftewel het ijken van de klok. Voor zover we nu weten werkt dat bij overgangen en energieën in atomen, maar niet bij de rotatie van de Aarde, die in de loop van de tijd verandert. Het kan in principe prima werken bij de op slingerbewegingen gebaseerde klokken zoals we die sinds Christiaan Huygens in de 17e eeuw kennen, maar het probleem bij klokken is de wrijving, temperatuurafhankelijkheid, het ijken en de slijtage. Belangrijk aan tijd is ook het ontbreken van een absolute tijd, waardoor we zijn aangewezen op het meten van tijdsverschillen. Een keuze van een multijdstip of absolute tijd, is net als de gebruikte eenheid voor tijdsverschillen enkel een afspraak zoals we die bijvoorbeeld kennen voor de jaartelling. Dus translatie in de tijd (het gelijktijdig verzetten



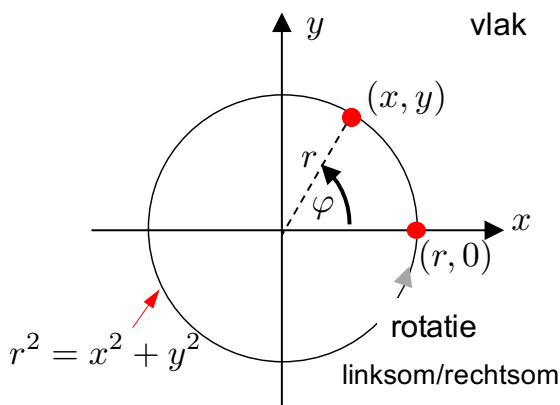
Figuur 2.2: De tijd-as (a) en één van de ruimte-assen (b) met bijbehorende begrippen. Beide assen bestrijken in principe de reële getallen van $-\infty$ tot $+\infty$ ($\pm$ oneindig).

van alle klokken) is een transformatie, die voor de werking van de wereld niets uitmaakt, een symmetrietransformatie.

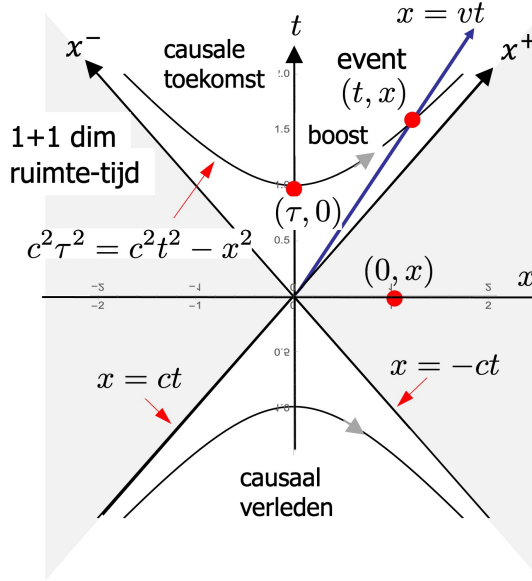
Naast tijd, kennen we ook ruimtelijke richtingen, bijvoorbeeld verschillende events op eenzelfde tijd maar verschillende plaatsen. Klassiek representeert de positie juist een systeem/deeltje/object (of het zwaartepunt daarvan), maar om alvast te waarschuwen dat gaat in een kwantumbeschrijving of in de relativiteitstheorie veranderen! In 1D kunnen we, naast het event *hier*, meerdere events hebben, gerangschikt op een lijn georieënteerd ten opzichte van *hier*, zoals links en rechts in figuur 2.2 (b). Zowel de tijd (vanaf *nu*) als de plaats (vanaf *hier*) zijn reële getallen die waarden kunnen hebben van minus oneindig ($-\infty$) tot plus oneindig ($+\infty$). Alvast voor later, de oriëntaties op de tijdas (verleden/toekomst) en die op de ruimte-as (links/rechts) hangen ook samen met fundamentele symmetrieën *tijdsomkeer* en ruimte-inversie of *pariteit*. De vrijheid in de keuze van het nulpunt (in de figuur het tijdstip *nu* en plaats *hier*) impliceert symmetrie onder schuiven (*translatiesymmetrie*).

In het combineren van twee ruimte-richtingen (bijvoorbeeld x en y als coördinaten in een vlak) wordt de vrijheid groter, een vlak is 2-dimensionaal met punten (x, y) , waarbij beide coördinaten van $-\infty$ tot $+\infty$ kunnen lopen. Maar er zijn behalve 1-dimensionale lijnen en de mogelijkheid om twee lijnen loodrecht op elkaar te kiezen, in een vlak ook interessante andere configuraties, zoals de verzameling van punten met een constante afstand tot de oorsprong, die op een *cirkel* met straal r liggen en voldoen aan $x^2 + y^2 = r^2$ (zie figuur 2.3). Die verzameling punten blijft hetzelfde als we het vlak om de oorsprong draaien over een hoek φ die in radialen de waardes aanneemt van $0 \leq \varphi < 2\pi$ (of in graden loopt van 0 tot 360 graden). Er zijn dus naast twee onafhankelijke translaties meer symmetrieën zoals de symmetrie onder rotaties om de oorsprong. We zullen het belang of implicatie van deze vrijheid herkennen bij bespreking van impulsmoment. Wanneer er meerdere ruimterichtingen zijn, bijvoorbeeld in de drie-dimensionale 3D Euclidische ruimte, zijn er drie onafhankelijke vlakken en het impulsmoment heeft drie componenten.

Het andere interessante geval is de combinatie van de tijd- en ruimte-richting tot een ruimte-tijd diagram, geïllustreerd in figuur 2.4. Een punt (t, x) hoort bij een event of gebeurtenis. De verbindingslijn van oorsprong en het punt (t, x) in de figuur is een rechte lijn $x = vt$ die een opeenvolging van events beschrijft voor een deeltje dat beweegt met snelheid v . Zo'n opeenvolging van events heet een *wereldlijn*. Wereldlijnen kunnen ook slingeren als de snelheid verandert. Voor een systeem in rust is de wereldlijn precies de tijdas die het punt $(0, 0)$ met punten op de verticale as verbindt zoals met het punt $(\tau, 0)$.



Figuur 2.3: De (Euclidische) ruimte met twee loodrechte richtingen. De punten op de cirkel hebben dezelfde afstand tot de oorsprong. De punten kunnen naast (x, y) gekarakteriseerd worden door de hoek (φ) die de verbindingslijn tussen oorsprong en zo'n punt maakt met bijvoorbeeld de x -as. Die hoek kan lopen van 0 tot 2π radialen (of van 0 tot 360 graden). De cirkel is invariant onder rotaties. Er is ook een discrete symmetrie in het vlak, rotaties linksom/rechtsom.



Figuur 2.4: Het Minkowski ruimte-tijd diagram met events (t, x) . De twee diagonale lijnen, $x = \pm ct$ beschrijven met de lichtsnelheid c naar links en rechts bewegende (licht)deeltjes. Dit zijn de assen $x^\pm = ct \pm x = 0$, die in 1 dimensie de lichtkegel begrenzen. Andere bijzondere lijnen zijn de punten op de hyperbool waar $x^+x^- = c^2t^2 - x^2$ constant is. Die constante correspondeert met dezelfde eigentijd τ voor deeltjes met verschillende snelheden $-c < v < c$ vertrokken vanuit de oorsprong. Ook geeft het de plaats en tijd van één deeltje waargenomen vanuit met eenparige snelheid bewegende coördinatensystemen. De wiskundige transformatie die punten op de hyperbool met elkaar verbindt staat bekend als een boost, te vergelijken met rotatie in xy -vlak

De tijd voor een systeem in rust heet de *eigentijd*. In de klassieke mechanica waar tijd en ruimte volledig onafhankelijk zijn, zou de tijd τ dan de tijd zijn voor alle wereldlijnen op horizontale lijnen. Maar tijd en ruimte blijken niet onafhankelijk te zijn en af te hangen van beweging, in het bijzonder van de snelheid. De events met dezelfde eigentijd τ blijken te liggen op een hyperbool $c^2t^2 - x^2 = c^2\tau^2$. M.a.w. een klok die de wereldlijn $x = vt$ volgt geeft in het punt waar de wereldlijn de hyperbool snijdt als tijd τ aan. De bewegende klok loopt dus langzamer. En op de lijnen $x = ct$ en $x = -ct$ staat de eigentijd zelfs stil. Deze lijnen zijn wereldlijnen van lichtdeeltjes en begrenzen het gebied $-ct < x < ct$, de *lichtkegel*. In 1 dimensie vormen de grenzen van de lichtkegel ook precies 2 assen waar $x^\pm = ct \pm x$ nul is. Eigenlijk is alleen in het geval van 2 ruimtelijke dimensies (2D) de lichtkegel echt een kegel, maar de naam lichtkegel (light-cone in Engels) wordt in deze context in alle ruimtelijke dimensies gebruikt als begrenzing van de causale toekomst en het causaal verleden. Een fysisch systeem blijkt vanaf tijd-ruimte punt $(0, 0)$ en ieder verder punt op zijn wereldlijn altijd te evolueren naar de causale toekomst, begrenst door een lichtkegel. Dit komt op hetzelfde neer als het bestaan van een maximale snelheid, de lichtsnelheid. Dat het zo werkt in onze wereld is nu eenmaal een experimenteel vastgesteld feit. De hyperbool blijft binnen de lichtkegel en de eenparige snelheid vanuit de oorsprong is een snelheid $v < c$. We komen hier in het volgende hoofdstuk uitgebreid op terug want deze situatie, waarin de lichtsnelheid de maximale en voor iedereen dezelfde snelheid is, is de mathematische onderbouwing van de speciale relativiteitstheorie. In het ruimte-tijd diagram zijn alle punten die buiten de lichtkegel vallen niet te bereiken via een wereldlijn waarop de snelheid beperkt is door de lichtsnelheid, iets wat bijvoorbeeld evident is voor punten als $(0, 0)$ en $(0, x)$. De punten buiten de lichtkegel zijn causaal gescheiden van de oorsprong. Er kan geen oorzakelijk verband bestaan tussen deze punten en de oorsprong, noch vanuit het verleden, noch naar de toekomst. De twee gescheiden toegestane gebieden vanuit onderkant en naar de bovenkant zijn het causale verleden en de causale toekomst. Net zoals we rotatiesymmetrie hadden langs de cirkel in het ruimtelijke vlak, is er een *boost* symmetrie langs de hyperbool, die punten met dezelfde eigentijd verbindt. Terwijl

het bij rotatiesymmetrie over twee t.o.v. elkaar gedraaide systemen ging, gaat het bij de boost symmetrie om twee met constante snelheid t.o.v. elkaar bewegende systemen

Omdat tijd en ruimte pas betekenis krijgen in context, zoals het vergelijken van één toestand op verschillende tijden of plaatsen, kun je je ook afvragen hoe het zit met twee tijdassen. Nu is die situatie gemakkelijk te reduceren tot één tijdrichting. Bij meerdere assen gekenmerkt met reële getallen, komt de meerwaarde als we een van de assen een bijzondere rol geven. We komen hier op terug en beperken ons hier tot de opmerking dat het vaak ook handig is om de ruimte-tijd te kenschetsen met de twee lichtkegel coördinaten $x^\pm$ en verder een aantal transversale ruimte richtingen, waarin de causale gebieden t.o.v. de oorsprong de gebieden waarin beide lichtkegelcoördinaten positief zijn (toekomst) of beide negatief (verleden) met voor gekwadrateerde eigentijd $x^+x^- = c^2\tau^2$ (zie figuur 2.4). Belangrijk is ook dat de discrete karakterisering verleden/toekomst en links/rechts nu ook continue vrijheid impliceren, met elkaar verbonden door symmetrie transformaties, voor boost symmetrie bijvoorbeeld gekarakteriseerd door snelheden, weliswaar beperkt tussen $0 \leq v/c < 1$.

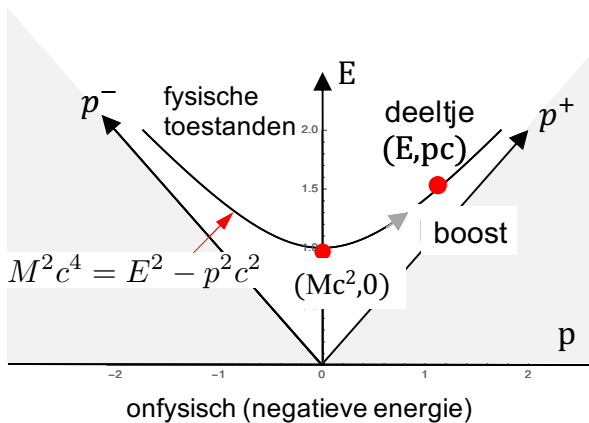
Kan het niet simpeler met tijd en ruimte onafhankelijk. Natuurlijk wel, maar probeer de natuur maar eens te vragen waarom ze dat niet doet.

2.3 Energie en impuls

Terwijl tijd en ruimte niet tastbaar zijn, zijn er voor een fysisch systeem wel corresponderende grootheden met heel bijzondere eigenschappen. Voor tijd is dat de grootheid energie, voor positie is dat de grootheid impuls, net als positie een vectorgrootheid. Voor dat we verschillen tussen 1, 2 of 3 ruimtelijke dimensies bespreken, eerst wat meer over energie en impuls. Voor een deeltje, of meer algemener een vrij bewegend systeem, hangen de energie E , de impuls $\mathbf{p}$ en de massa m samen volgens

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4, \quad (2.1)$$

waar c de lichtsnelheid is. Hier is p de lengte van de impulsvector $\mathbf{p}$. Dit representeert een hyperbool in een energie-impuls diagram (zie figuur 2.5). In meer dan 1 dimensie heeft de (vetgedrukte) impulsvector ook een richting en is een grootheid die leeft in een driedimensionale wereld. Net zoals een positie $\mathbf{r}$ een vector is met drie componenten x , y en z , genoteerd als $\mathbf{r} = (x, y, z)$, hebben snelheid $\mathbf{v}$ en impuls $\mathbf{p}$ ook drie componenten, $\mathbf{v} =$



Figuur 2.5: *Net als ruimte en tijd afhankelijk zijn van relatieve snelheid van waarnemer en deeltje, is dat het geval voor energie E en impuls p . Tegen elkaar uitgezet liggen alle mogelijkheden voor een deeltje met massa M ook op een hyperbool, waarop twee punten corresponderend met snelheid nul en met een eindige (positieve) snelheid zijn aangegeven. De asymptoten van de hyperbool zijn de assen waar de lichtkegel coördinaten $p^\pm = E \pm pc$ nul zijn.*

(v_x, v_y, v_z) , etc. De lengte van een vector, bijvoorbeeld impuls, is $p = |\mathbf{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$. Het bijzondere van vgl. 2.1 is dat de grootte van de impuls voor gegeven massa en energie vastligt. De verhouding van impulsvector en snelheidsvector is precies de energie gedeeld door c^2 ; in de klassieke limiet $v \ll c$ reduceert dat tot de massa. De exacte relatie is

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v} \quad \text{of} \quad \mathbf{p}c = E \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (2.2)$$

Terwijl snelheid afhangt van de waarnemer, net als energie en impuls, is de massa van het systeem onafhankelijk van de snelheid of waarnemer, net als eigentijd bij tijd en ruimte. Het is een kenmerk van het systeem. Uit bovenstaande relatie 2.1 zien we dat objecten *met* massa altijd $E > pc$ hebben en dus leert relatie 2.2 ons dat $v < c$. Voor deeltjes *zonder* massa is $E = pc$ en $v = c$, en bevinden we ons op de randen van de *lichtkegel* in het energie-impuls diagram, waar dan als detail nog de richtingen van $\mathbf{p}$ of $\mathbf{v}$ bijkomen. Uit bovenstaande relaties kunnen we direct de uitdrukkingen voor energie en impuls in termen van massa en snelheid vinden (zie kader ‘Energie en impuls uitgedrukt in snelheid’).

De eigenschap in 2.1 betekent dat energie en impuls net als ruimte en tijd een vier-vector vormen (zie kader over viervectoren). Net als ruimte en tijd zijn energie en impuls elementaire concepten voor natuurkundigen die een belangrijke rol in de wereld van alledag spelen. Hun fundamentele betekenis krijgen de grootheden echter door hun relatie met de symmetrieën in ruimte en tijd. Als er in een gegeven richting niets is wat verandert voor een object, denk bijvoorbeeld aan een kogel die wrijvingsloos kan rollen in een lange goot, dan verandert de impuls van die kogel niet. Dit is het fundamentele verband tussen *invariantie in een ruimterichting*, ook wel *translatie-invariantie* genoemd en *behoud van impuls*. Als er wel iets verandert in een bepaalde richting, dan is er geen behoud van impuls. Dat komt hierna ter sprake als kracht. Als er niets verandert in de tijd, hebben we op dezelfde manier *translatie-invariantie in de tijd* en daarmee correspondeert de grootheid *energie* die niet verandert en we hebben *behoud van energie* gekoppeld aan *invariantie in de tijd*. Dit lijkt op het eerste gezicht gekoppeld aan behoud van impuls, en dat is ook het geval voor een geïsoleerd vrij bewegend systeem waar energie en impuls variëren met de snelheid (zie eerdere kader), maar zelfs bij aanwezigheid van krachten (waarbij de impuls dus niet meer behouden is) is er de grootheid energie die niet verandert, tenminste als de krachten maar niet van de tijd afhangen. In dat geval onderscheiden we kinetische en potentiële energie.

In de sectie over ruimte en tijd hebben we behalve translatiesymmetrie ook nog de discrete symmetrieën gezien, tijdsomkeer en ruimte-inversie of pariteit. Die symmetrieën hebben ook belangrijke implicaties voor energie en impuls. Pariteit is het eenvoudigste en correspondeert met een verwisseling van links en rechts. Met zo’n symmetrie zijn bewegingen in tegengestelde richtingen identiek. Tijdsomkeer is veel intrigerender. Bij tijd is er verschil tussen toekomst en verleden met vergaande implicaties, zeker als het om meer dan een enkel geïsoleerd object gaat. Precies zo heeft de tijdsomkeer symmetrie vergaande consequenties voor energie. De grootheid energie waar we mee werken is altijd positief (of iets preciezer geformuleerd, is begrensd naar beneden: er is een toestand met laagste energie, die we nul kunnen stellen). De mogelijkheid om in beschrijvingen zoals vergelijking 2.1 het teken van energie E om te draaien, vertaalt zich in het bestaan van materie en anti-materie met gelijke massa’s en positieve energieën. Voorbeelden zijn elektronen en hun antideeltjes, de positronen. Voor zowel materie als anti-materie is de energie naar beneden begrensd, dus met de juiste nulkeuze voor allebei positieve energieën,

Energie en impuls uitgedrukt in snelheid

Wanneer we een object of systeem, waarvoor energie, impuls en snelheid gerelateerd zijn via 2.1 en 2.2, waarnemen, dan kunnen we gegeven de massa uit de snelheid de energie en impuls vinden door de vergelijkingen op te lossen en we vinden

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{en} \quad \mathbf{p} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Als het object in rust is ($v = 0$) dan vinden we

$$E_0 = m c^2 \quad \text{of} \quad m = E_0/c^2.$$

Ook al zijn beide uitdrukkingen equivalent, toch zegt de laatste vergelijking iets heel belangrijks. Namelijk massa van een object of wat voor ingewikkelder systeem dan ook, is niets meer dan de energie van het object in rust. Nog preciezer, het zwaartepunt of massamiddelpunt moet in rust zijn. Het object mag eventueel best draaien of opgebouwd zijn uit bewegende delen. Dat houdt ook in dat een afgemeten hoeveelheid, zeg een liter, water met een temperatuur van 100 °C dus een grotere massa heeft dan diezelfde hoeveelheid water afgekoeld tot een temperatuur van 18 °C. Maar een auto die met 120 km/u over de snelweg rijdt heeft dezelfde massa als dezelfde stilstaande auto.

Voor snelheden die klein zijn in vergelijking met de lichtsnelheid ($v \ll c$) kunnen we i.p.v. de bovenstaande vergelijking met een worteluitdrukking gebruik maken van een benadering. Met gebruik van $\beta = v/c$ krijgen we voor kleine waarden hiervan

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2 = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2},$$

en vinden we

$$E \approx m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{en} \quad \mathbf{p} \approx m \mathbf{v},$$

de bekende alledaagse niet-relativistische uitdrukkingen die in de uitdrukking voor de energie behalve de kinetische energie ook het energie-equivalent van de massa bevat.

maar andere eigenschappen zijn wel tegengesteld, zoals elektrische lading, negatief voor elektron, positief voor positron. Een dergelijke symmetrie laat ook deeltjes toe die hun eigen antideeltje zijn, zoals fotonen, die dan ook geen elektrische lading hebben. Op draaiing en spinbeweging van deeltjes en antideeltjes komen we later nog uitgebreid terug.

We hebben het hierboven soms gehad over een geïsoleerd enkel object. Maar een geïsoleerd systeem is een nogal geïdealiseerde situatie. Als fietser merken we bijvoorbeeld dat je laten uitrollen niet eeuwig doorgaat, m.a.w. de impuls verandert. Juist daarom is de nettere benaming van impuls, namelijk *hoeveelheid van beweging* (*momentum* in het Engels) eigenlijk veel mooier. De impuls verandert, oftewel een deel van de hoeveelheid van beweging wordt overgedragen. Dat komt door de wrijving tussen banden en wegdek en door de wind. Dat wil zeggen dat je het ‘systeem’ moet uitbreiden. Behoud van energie en impuls is daarom praktischer te vertalen in ‘energie en impuls gaan niet verloren’. De kinetische energie die je als fietser hebt wordt overgedragen aan het wegdek en banden

Het gebruik van viervectoren en inproducten in Minkowski ruimte

Tijd-ruimte en energie-impuls hebben we al gerepresenteerd als viervectoren $x = (ct, \mathbf{r})$ en $p = (E/c, \mathbf{p})$, waar we nu de lichtsnelheid hebben gebruikt om er voor te zorgen dat alle componenten van de viervectoren dezelfde dimensie hebben (lengte en impuls, respectievelijk). Voor 3-vectoren als $\mathbf{r} = (x, y, z)$ of (x^1, x^2, x^3) en $\mathbf{p} = (p^1, p^2, p^3)$ hebben we een *Euclidische inproduct* van 3-vectoren $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$ waarmee we afstanden $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$, of totale impuls $p^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ compact kunnen weergeven, maar ook grootheden als de generalisatie van de fase in het kader in de inleiding, $\varphi = kx = px/\hbar \rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, wanneer we van 1 naar 3 dimensies gaan. Deze inproducten van 3-vectoren zijn invariant, d.w.z. veranderen niet, onder rotaties in de 3-dimensionale (Euclidische) ruimte.

Voor de 4-vectoren $a = (a^0, \mathbf{a}) = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ is het inproduct $a \cdot b = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ bijzonder nuttig. Het kan gebruikt worden om eigentijd en massa als lengtes van 4-vectoren te zien, $c^2 \tau^2 = x \cdot x$ en $m^2 c^2 = p \cdot p$. Verder kan de gecombineerde tijd- en plaats-afhankelijkheid van de fase $\varphi(x, t)$ van lopende golven als inproduct worden geschreven, $\varphi(x, t) = p \cdot x/\hbar = (Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. Inproducten van viervectoren zijn invariantie onder boost transformaties, d.w.z. de inproducten zijn hetzelfde voor waarnemers in alle systemen die met een constante snelheid t.o.v. elkaar bewegen.

in de vorm van warmte (bewegingsenergie van moleculen) of aan de luchtmoleculen. Die luchtmoleculen botsen met je lichaam met als gevolg dat zowel voor jou (inclusief fiets) als van de luchtmoleculen de impuls verandert.

De collage in figuur 2.6 illustreert de centrale rol van energie in ons bestaan. De eenheid van energie is de Joule (J). Je hebt bijvoorbeeld voor je stofwisseling iets minder dan 100 J/s nodig. Dat is een energieverbruik of *vermogen* van bijna 100 Watt (W). Dat betekent zo'n 8500 kJ/dag. De energie (dus bijvoorbeeld aantal kJ's) die je voor voeding uit een blikje of pakje kunt halen staat meestal op de verpakking vermeld. Die energie kun je na alle metabolische omzettingen gebruiken, je kunt er 'arbeid mee verrichten' of het gaat als warmte naar de omgeving. Het totale energieverbruik per hoofd van de bevolking in Nederland is van de orde van grootte van $10 \text{ kW} = 10 \text{ kJ/s}$. Dat is dus zo'n 100 maal meer dan wat we voor onze stofwisseling nodig hebben, maar denk aan de verwarming en verlichting van onze huizen, transport per auto, trein of vliegtuig en het produceren van alles wat we consumeren.

Al die energie moet ergens vandaan komen. In hoofdzaak komt die via via van de kernfusieprocessen die zich in de Zon afspelen en die al miljarden jaren lang via zonnestraling op de Aarde terechtkomt, bij loodrechte inval zo'n 1400 W/m^2 . Het overgrote deel daarvan wordt ook weer door de Aarde uitgestraald, maar het houdt wel de atmosfeer in beweging (zie hoofdstuk 9) en heeft via een omweg ook de voor onze huidige energievoorziening zo belangrijke voorraden steenkool, olie en gas geproduceerd. Op de kernfusieprocessen in de Zon komen we in hoofdstuk 7 nog terug, maar in essentie wordt daar massa omgezet in energie van deeltjes zoals neutrinos en fotonen. Laten we om de enorme hoeveelheid energie die via $E = mc^2$ in massa opgeslagen zit te illustreren, eens kijken naar de energie die in één jaar verbruikt wordt in Nederland. Dat is voor 18 miljoen inwoners ongeveer $18 \times 10^6 \times 3 \times 10^7 \text{ s} \times 10^4 \text{ J/s} \sim 5 \times 10^{18} \text{ J}$ (5000 PetaJoule of 5 ExaJoule). Dat correspondeert met de energie opgeslagen in een massa van net iets meer dan 50 kg.



Figuur 2.6: De centrale rol van energie

2.4 Meer dimensies; rotaties en impulsmoment

Naast energie en impuls is ook *impulsmoment* of hoeveelheid van draaiing (*angular momentum* in het Engels) een behouden grootte. Hieraan ligt rotatiesymmetrie ten grondslag. Rotatie is een beweging die in een vlak plaatsvindt en bespreken we al bij ruimte-tijd (zie figuur 2.3), waarbij minimaal twee ruimte-richtingen vereist zijn. Nog een stap verder hebben we de drie-dimensionale (3D) ruimte, waar we aan een vlak een richting kunnen toekennen, bijvoorbeeld bij het x-y vlak hoort de z-richting. We kunnen de positieve en negatieve z-richting koppelen aan de twee orientaties van de rotatie, een rechtshandige of linkshandige schroefbeweging. Bij ieder vlak hoort zo een unieke richting, die de richting (en het teken) van het impulsmoment aangeeft. Naast de richting wordt aan impulsmoment een grootte toegekend die evenredig is met de oppervlakte van het cirkeldeel die een massa per tijdseenheid bestrijkt, het begrip *perken* van Kepler.

Het impulsmoment $\mathbf{J}$ van een systeem of object is opgebouwd uit meerdere bijdragen. Allereerst heeft een deeltje met impuls $\mathbf{p}$ ten opzichte van een draaipunt een baanimpuls-

impulsmoment



Figuur 2.7: De extra vrijheid in het geval van drie ruimte dimensies. Terwijl er in 2D maar een impulsmoment is, zijn er drie onafhankelijke richtingen in 3D en impulsmoment is een vector, net zoals impuls. De richting van de impulsmoment vector is gekoppeld aan de orientatie (linksom/rechtsom) van de rotatie.

moment $\mathbf{L}$ gegeven door het uitproduct van de plaats- en impulsvectoren, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, voor een niet te snel bewegende massa, dus $\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Het impulsmoment (uitproduct) is een vector loodrecht op het vlak gevormd door positie $\mathbf{r}$ gemeten vanaf draaipunt en snelheid $\mathbf{v}$. De grootte is gelijk aan het product van de impuls en de component van $\mathbf{r}$ loodrecht op de impuls (de ‘arm’). Behoud van impulsmoment, in het bijzonder de richting, impliceert ook de aanwezigheid van een vast baanvlak waarin de rotatie plaatsvindt, zoals we dat zien in ons planetenstelsel. De perkenwet van Kepler voor de ellipsbanen van planeten is een voorbeeld van het behoud van impulsmoment. Naast het baanimpulsmoment is er nog een tweede bijdrage tot het impulsmoment, intrinsiek impulsmoment of *spin* ($\mathbf{S}$) genoemd, zodat het totaal $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ is. Een mooi voorbeeld is de roterende Aarde (spin), die ook in een baan om de Zon draait. Of dichterbij huis het Aarde-Maan systeem.

De eenheid van impulsmoment is exact hetzelfde als de eenheid waarin de constante van Planck wordt uitgedrukt. Een van de opmerkelijkste resultaten en aanwijzing dat we microscopisch een kwantummechanische beschrijving van onze wereld nodig hebben, is dat de grootte van impulsmomenten gekwantiseerd is in veelvouden van $\hbar/2$ en de componenten onderling verschillen in stappen van $\hbar$. Een heleboel elementaire deeltjes, waaronder het elektron, hebben de kleinst mogelijke waarde (ongelijk aan nul) voor het intrinsieke impulsmoment, namelijk of $+\hbar/2$ of $-\hbar/2$. Wel alvast een waarschuwing dat rotatiesymmetrie weliswaar aan de basis ligt, maar dat juist deze halftallige waarden geen ruimtelijke rotaties beschrijven. Daarvan kunnen de componenten alleen heeltallige veelvouden van $\hbar$ zijn, maar dat alvast als voorproefje voor later.

2.5 Eenheden

In de subatomaire wereld gebruiken fysici voor energieën meestal niet de Joule maar de elektronvolt (eV) of veelvouden daarvan. De getallen worden dan hanteerbaarder, bijvoorbeeld in een waterstofatoom is er 13,6 eV nodig om het elektron vrij te maken. Bovendien is het een handige eenheid in de versnellers waarmee onderzoek naar elementaire deeltjes gedaan wordt. Als je een elektron met lading $e \equiv 1,602\,176\,634 \times 10^{-19}$ Coulomb (C) een spanningsverschil van 1 V (1 Volt = 1 J/C) laat doorlopen dan is de verkregen energie 1 eV. Omdat de gegeven waarde van e niets anders is dan de definitie van wat een Coulomb is (aangegeven met $\equiv$), krijgen we ook vanzelf de omrekening,

$$1 \text{ eV} = 1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Verder zijn voor twee van de drie eenheden in het MKS-eenhedenstelsel (meter-kilogram-seconde) de standaarden tegenwoordig gekoppeld aan natuurconstanten en op die manier hoeven we eigenlijk nog maar één van de eenheden te gebruiken. Al vele jaren wordt de meter niet langer vastgelegd door de lengte van een platina standaard in Parijs, maar eenvoudigweg door te zeggen dat de waarde $c \equiv 299\,792\,458$ m/s exact is. We kunnen dus de meter vergeten; met een lengte van 1 s bedoelen we dan eenvoudigweg c meter. De seconde wordt nog wel door een klok vastgelegd, maar dan eentje die als driver de hiervoor al genoemde frequentie horend bij een overgang in het Cesium atoom als basis heeft. De link tussen energie en seconde wordt gelegd door de waarde van de constante van Planck $h \equiv 6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$ Js als definitie te kiezen i.p.v. uit te gaan van een standaard platina kilogram voor de eenheid van massa.



Figuur 2.8: *De versnellerringen van CERN geprojecteerd op een luchtfoto van Genève*

In de subatomaire wereld wordt meestal de eenheid van energie gebruikt voor allerlei grootheden. De grootheden $\hbar$ en c worden dan gelijk genomen aan 1, zodat we hun waarden in andere eenheden kunnen gebruiken als we willen omrekenen, bijvoorbeeld gebruikmakend van veelvoud van eV's, kunnen we de (afgeronde) waarde

$$\hbar = 6,58 \times 10^{-22} \text{ MeV s},$$

gelijkstellen aan 1 en dat relateert energie aan de seconde. Het product $\hbar c$, afgerond gelijk aan

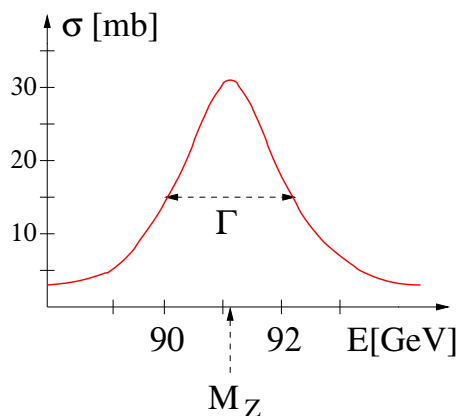
$$\hbar c = 197 \text{ MeV fm} = 197 \text{ eV nm},$$

legt dan het verband tussen lengte en energie. Uit het verband tussen lengte en energie via het product van de fundamentele constanten $\hbar$ en c , vinden we bijvoorbeeld direct de relatie tussen golflengte en energie van straling of de resolutie die met versnellers bereikt kan worden. In een versneller worden deeltjes, zoals elektronen of protonen versneld. In essentie doorlopen deeltjes een voldoende groot potentiaalverschil van bijvoorbeeld miljoenen volts om zodoende energieën van miljoenen eV's (MeV's) te krijgen. In feite is de benaming versneller wat vreemd, want de snelheid wordt nooit groter dan c . De energie blijft bij het doorlopen van het potentiaalverschil wel toenemen. Voor een elektron met een energie van 1 GeV is dan de energie wel zo'n 2000 maal groter dan de energie in rust, die correspondeert met $m_e c^2 = 0,51 \text{ MeV}$. Gebruikmakend van het energie-impuls kader kunnen we nagaan dat dan de snelheid in dat geval ongeveer $0,999\,999\,9 \times c$ is. Voor een elektron met die snelheid geldt bij benadering $E = pc$ en het gedraagt zich als 'licht' met

een golflengte van de orde van grootte van $\hbar/p = \hbar c/E$, dus ongeveer $197 \text{ MeV fm}/1000 \text{ MeV} \approx 0,2 \text{ fm}$. Op die manier is met elektronen gemeten dat de straal van een proton iets kleiner is dan 1 fm . Met de grootste versnellers kunnen we nu energieën in de orde van 10 TeV 's ($10\,000 \text{ GeV}$) halen, waarmee een resolutie van beter dan $10^{-4} \text{ fm} = 10^{-19} \text{ m}$ gehaald wordt.

Versnellers kunnen lineair zijn of, wat op het eerste gezicht erg logisch lijkt cirkelvormig. In dat laatste geval kunnen we de deeltjes rond laten lopen, in hun baan gehouden door magneten, en kunnen ze bij iedere rondgang verder versneld worden. Bovendien is het mogelijk om negatief en positief geladen deeltjes in tegenovergestelde richtingen te laten draaien, bijvoorbeeld negatieve elektronen en hun positieve antideeltjes, positronen. Door ze op het juiste moment via een pulsje met de magneten te sturen kan men de bundels frontaal op elkaar laten botsen en komt de totale energie beschikbaar om via $E = mc^2$ nieuwe deeltjes met zwaardere massa's te creëren. Op deze manier werkte bijvoorbeeld de LEP-versneller bij het versnellercomplex CERN in Genève (zie figuur 2.8). Elektronen en positronen draaiden in een ring met omtrek van ruim 27 km , zich uitstrekkend onder de grond bij Geneve tot onder de Jura. Ondanks het feit dat men deeltjes laat rondgaan, kan de ring niet te klein zijn, want wanneer elektronen de bocht om gaan zenden ze lichtdeeltjes uit (behoud van impuls!). Dit leidt tot energieverlies. Om dit energieverlies binnen de perken te houden moet de straal van de baan van de elektronen groot zijn. Afbuiging in een kleinere ring zou enorm grote magneetvelden vereisen. Voor zwaardere geladen deeltjes zoals protonen of atoomkernen is het verlies in een ring kleiner. Vandaar dat in de Large Hadron Collider (LHC) bij CERN in Genève, in dezelfde ring is gekozen voor het laten botsen van protonen in twee bundels van elk 7 TeV . Daar zijn dan nog steeds supergeleidende magneten nodig die velden leveren van 8 Tesla . De Tesla is de eenheid voor magnetische velden, $1 \text{ Tesla} = 1 \text{ Vs/m}^2 = 1 \text{ Js/Cm}^2 = 10^4 \text{ Gauss}$. Het magneetveld van de Aarde ter vergelijking is slechts van de orde van grootte van $50 \mu\text{T}$ ($0,5 \text{ Gauss}$).

Een voorbeeld waarbij de relatie tussen energie en tijd een rol speelt is de eindige leeftijd van deeltjes. Een van de resultaten van het onderzoek met de LEP versneller is de ontdekking van het Z^0 -deeltje. Een deeltje vertoont zich in de experimenten als een piek in het aantal botsingen als functie van de gecombineerde energie van de botsende elektronen en positronbundels, zoals geschetst in figuur 2.9. In de kwantummechanica bepaalt de energie hoe de golffunctie zich gedraagt in de tijd. Een deeltje dat niet stabiel is en na een bepaalde tijd uit elkaar valt in andere deeltjes wordt niet beschreven door een golffunctie met maar één energie, maar door een superpositie van golven met meerdere energieën, weliswaar geconcentreerd rondom een centrale waarde. De centrale waarde bepaalt de



Figuur 2.9: De resonantiepiek van het Z^0 -deeltje zoals dat verschijnt in elektron-positron botsingen. De energie is de gecombineerde energie van de botsende deeltjes. De werkzame doorsnede σ zullen we later nog bespreken, het is een maat voor het aantal botsingen. De energie waarbij de werkzame doorsnede piekt correspondeert met de massa van het deeltje, de energieverbreiding Γ bepaalt de leeftijd van het deeltje.

Hoe krachten energie en impuls veranderen.

Krachten veranderen behouden grootheden. De verandering van impuls ($\mathbf{p}$) is afhankelijk van de *stoot*, bepaald door de tijd (dt) die een kracht werkt (kracht maal tijd),

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt \quad \text{of} \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

De verandering in energie is afhankelijk van de verrichte *arbeid*, bepaald door de afstand (dx) waarover een kracht langs de weg (F_x) wordt uitgeoefend (inproduct van kracht en afgelegde weg),

$$dE = -F_x dx \quad \text{of} \quad F_x = -\frac{dE}{dx},$$

of gebruikmakend van vectoren,

$$dE = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{of} \quad \mathbf{F} = -\nabla E,$$

waarbij het teken uitdrukt dat je energie in een systeem stopt wanneer je het tegen een kracht in versleept. Alleen de component langs de afgelegde weg is belangrijk voor de energieverandering. Wanneer het voor de energie geen verschil maakt hoe we een bepaalde positie bereiken (*conservatieve* krachten) kunnen we bovenstaande vergelijking gebruiken om voor iedere plaats de *potentiële energie* $U(\mathbf{r})$ te berekenen. Wanneer we de kracht elimineren uit beide vergelijkingen zien we dat $dE/dp_x = dx/dt = v_x$. Deze laatste en bovenstaande vergelijkingen zijn zowel in de klassieke mechanica als in de relativiteitstheorie geldig.

massa, $E_{\text{piek}} = M_Z c^2$ met als resultaat 91,2 GeV, terwijl de spreiding Γ in de energie de levensduur bepaalt, waarbij de evenredigheidsconstante $\hbar$ is (wat zou het anders kunnen zijn?); de (exponentiële) levensduur is $\tau = \hbar/\Gamma$. Met de gevonden waarde $\Gamma_Z = 2,5$ GeV correspondeert een levensduur van slechts $\tau = 2,5 \times 10^{-25}$ s. Desondanks speelt dit deeltje zoals we verderop zullen bespreken een belangrijke rol als een van de fundamentele krachtdeeltjes.

2.6 Krachten

Dat brengt ons op het begrip kracht dat we tot slot van dit hoofdstuk willen introduceren. Of het nu kwantummechanica of klassieke mechanica, relativistisch of niet-relativistisch is, het effect van krachten blijkt uit een verandering van de behouden grootheden, met name energie en impuls, in meer detail geïntroduceerd in het kader. Een kracht leidt tot een verandering van snelheid of een vormverandering van stoffen. Een kracht heeft zowel een grootte als een richting. In de klassieke mechanica waar energie in essentie komt van de massa is de snelheidsverandering (versnelling) $\mathbf{a}$ van een voorwerp evenredig met de kracht $\mathbf{F}$, waarbij de verhouding precies de massa m van het voorwerp is (Newton),

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}. \quad (2.3)$$

De eenheid van kracht is de Newton (N) en is gerelateerd aan de basiseenheden via $N = \text{kg m/s}^2$, direct af te lezen uit (bijvoorbeeld) vergelijking 2.3.

Een van de bekendste voorbeelden van een stabiel systeem waarbij een kracht in evenwicht is met een versnelling is de cirkelbeweging, een goede benadering voor de baan van de Aarde om de Zon met zwaartekracht als relevante kracht,

$$F_{\text{gravitatie}} = G \frac{M_{\text{zon}} m}{R^2} \quad \text{met} \quad U_{\text{gravitatie}}(r) = -\frac{G M_{\text{zon}} m}{r}, \quad (2.4)$$

waar $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ de constante is die de sterkte van de zwaartekracht typeert¹. De zwaartekracht zorgt voor de versnelling $a = v^2/R$ die nodig is om de richting van de snelheid te veranderen bij een cirkelbeweging met straal R en baansnelheid v . In het geval waarin de zwaartekracht de Aarde of welke planeet dan ook (massa m) in een baan om de Zon houdt, krijgen we

$$F = G \frac{M_{\text{zon}} m}{R^2} = \frac{m v^2}{R}, \quad (2.5)$$

Het is in vergelijking 2.5 overigens helemaal niet vanzelfsprekend dat de *trage* massa die bij het verband tussen kracht en versnelling optreedt, de meest rechtse uitdrukking, dezelfde is als de *zware* massa die optreedt in de uitdrukking voor de zwaartekracht in het product $M_{\text{zon}} m$ in de middelste uitdrukking. Dit staat bekend als het equivalentieprincipe en leidt er toe dat in vergelijking 2.5 de massa van de planeet er niet toe doet. Gegeven de afstand R tot de Zon kunnen we nu bijvoorbeeld de snelheid van de planeet berekenen of de omlooptijd (T) uit $v T = 2\pi R$. Voor de omlooptijd krijgen we dan de bekende relatie (Kepler),

$$\frac{G M_{\text{zon}}}{4\pi^2} = \frac{R^3}{T^2},$$

die zegt dat voor de planeten het kwadraat van de omlooptijd evenredig is met de derde macht van de afstand. Ook zien we dat we wanneer we de sterkte van de zwaartekracht kennen, we uit afstanden en omlooptijden van planeten de massa van de Zon kunnen berekenen. Dit werkt ook voor dubbelsterren, waar we uit de afstand en omlooptijd van een begeleider de massa van de ster kunnen bepalen.

In de algemene relativiteitstheorie wordt het effect van massa op de omgeving, dat is dus de baanbeweging als gevolg van een kracht vertaald in een ‘rechtlijnige beweging’ in een gekromde ruimte. Maar het is belangrijk te realiseren dat voor beide situaties het resultaat van buitenaf, dat wil zeggen de baanbeweging (inclusief effecten als perihelium precessie), hetzelfde is en slechts afhangt van de energie ‘binnen’ de baan. Uit de bewegingen van sterren in de buurt van Sagittarius A* nabij het centrum van ons Melkwegstelsel kan dus eenvoudigweg met de wetten van Kepler geconcludeerd worden dat er zich binnen een baan, die in de ‘perihelium’ situatie ongeveer 17 lichturen (ongeveer 18 miljard km) is, zo’n 4 miljoen zonnemassa’s bevinden. Die afstand is overigens nog circa 1 400 maal groter dan de Schwarzschildstraal van het waarschijnlijke superzware zwarte gat dat zich in het centrum van ons Melkwegstelsel bevindt. We komen nog in meer detail terug op zwarte gaten. Maar nog één opmerking over de massa van een zwart gat. Ook in dat geval correspondeert het met de energie in het zwarte gat. Dat manifesteerde zich dramatisch in de waarneming van gravitatiegolven. De eerste waarneming, in september 2015,

¹Hoewel we de potentiële energie $U(r)$ hier niet onmiddellijk nodig hebben noemen we die toch even omdat de uitdrukking later van pas komt; we kunnen de kracht vinden als $F = -dU(r)/dr$, waarbij het teken in de uitdrukking impliceert dat de kracht radiëel naar binnen is gericht als U een stijgende functie van r is.

correspondeerde met samensmeltende zwarte gaten van circa 36 en 30 zonnemassa's die na samensmelten een systeem vormen met een massa slechts gelijk aan 63 zonnemassa's. Geen behoud van massa, maar het equivalent van 3 zonnemassa's is het heelal ingeslingerd als energie van gravitatiegolven, energie opgeslagen in de zich met de lichtsnelheid uitdijende rimpelingen in de kromming van ruimte en tijd.

Hoofdstuk 3

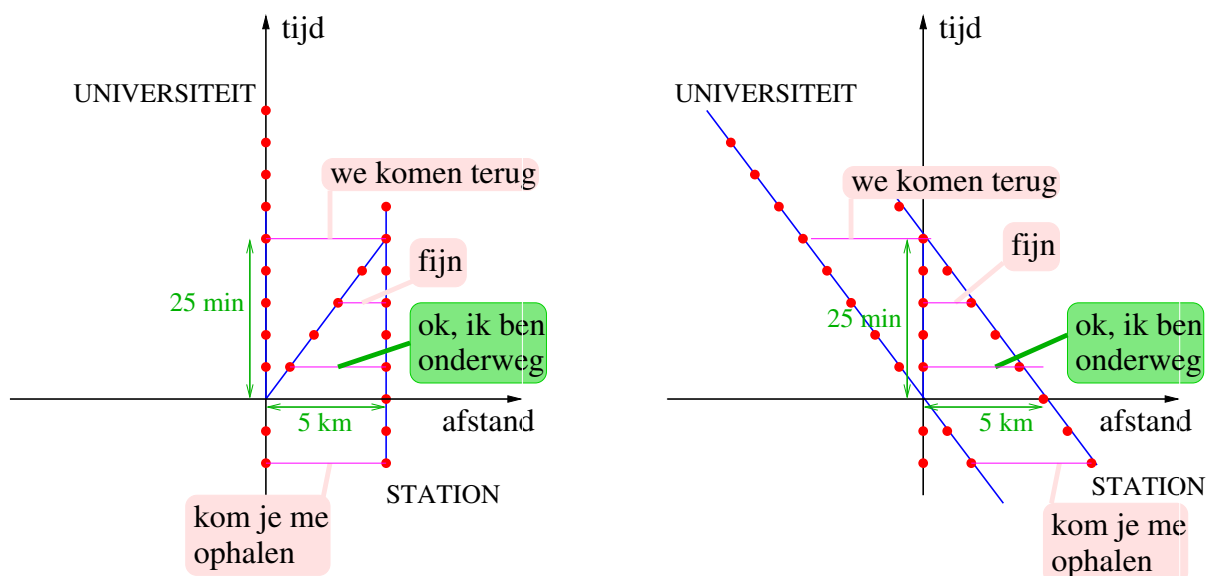
Het theoretische fundament

In een fysische theorie proberen we structuur aan te brengen en fysische wetten te formuleren waarmee de materie en de beweging in ruimte en tijd beschreven kan worden. Op die manier wordt een theoretisch raamwerk gebouwd waarmee voorspellingen gedaan kunnen worden. Met deze voorspellingen kan op grond van experimenten of nieuwe waarnemingen de theorie worden getoetst en bevestigd of het blijkt nodig om de theorie op onderdelen aan te passen als dat mogelijk is of om deze te verwerpen.

Alle waargenomen verschijnselen die we in de fysische wereld proberen te beschrijven lijken zich af te spelen in drie ruimte dimensies, waarbij we al dan niet als vierde dimensie de tijd meenemen. Lokaal, dat wil zeggen op één plek, kan de tijd worden gemeten met een ‘klok’. Dat vereist allereerst natuurlijk het perfectioneren van de klok, zeg maar van slinger tot atoomklok. Maar zelfs als we standaardklokken hebben, dan blijken klokken niet synchroon te lopen. De tijd wordt afhankelijk van de posities en snelheden van de klokken. Maar het blijkt mogelijk om fysische wetten waarin de tijd een rol speelt, te formuleren zodat deze onafhankelijk zijn van de de waarnemer en diens beweging. Dat geheel staat bekend als de *speciale relativiteitstheorie*.

In de ruimte-tijd blijkt het meten van eigenschappen niet zomaar vanzelfsprekend. Proberen we bijvoorbeeld de snelheid/impuls of het impulsmoment te meten, dan blijkt de uitkomst soms niet eenduidig te zijn, ook al denken we metingen te doen aan identieke systemen onder identieke omstandigheden. Soms is de uitkomst niet eenduidig, maar blijkt die uitkomst wel met een tweede meting bevestigd te kunnen worden. Blijkbaar is door de meting of het meetproces de toestand van het systeem vastgelegd, zodat we wel degelijk een toestand hebben met een unieke waarde voor die desbetreffende eigenschap. Die eigenschap blijkt dan soms na verloop van tijd wel weer te veranderen, soms ook niet. Dit bepalen van goede en onderling compatibele eigenschappen van een systeem is een van de meest opzienbarende aspecten in de *kwantummechanica*.

De combinatie van kwantummechanica en speciale relativiteitstheorie levert weer een volledig nieuwe wereld op, waarin zowel *materie* als *anti-materie* voorkomt en waarin massa een eigenschap is van deeltjes die zowel de wisselwerking met het Higgsveld beschrijft als de ruimte-tijd doet krommen. Deze werelden worden separaat beschreven via *kwantumveldentheorieën*, in het bijzonder die van het zogenaamde *standaardmodel* van de elementaire deeltjesfysica en de *algemene relativiteitstheorie*. Voor beide theorieën zijn aanwijzingen in overvloed aanwezig. Het consistente combineren van deze twee in één theoretisch raamwerk waarin zowel ruimte-tijd als de symmetrieën van het standaardmodel passen, wijst op de noodzaak van weer nieuwe wereldbeelden, mogelijk met meer



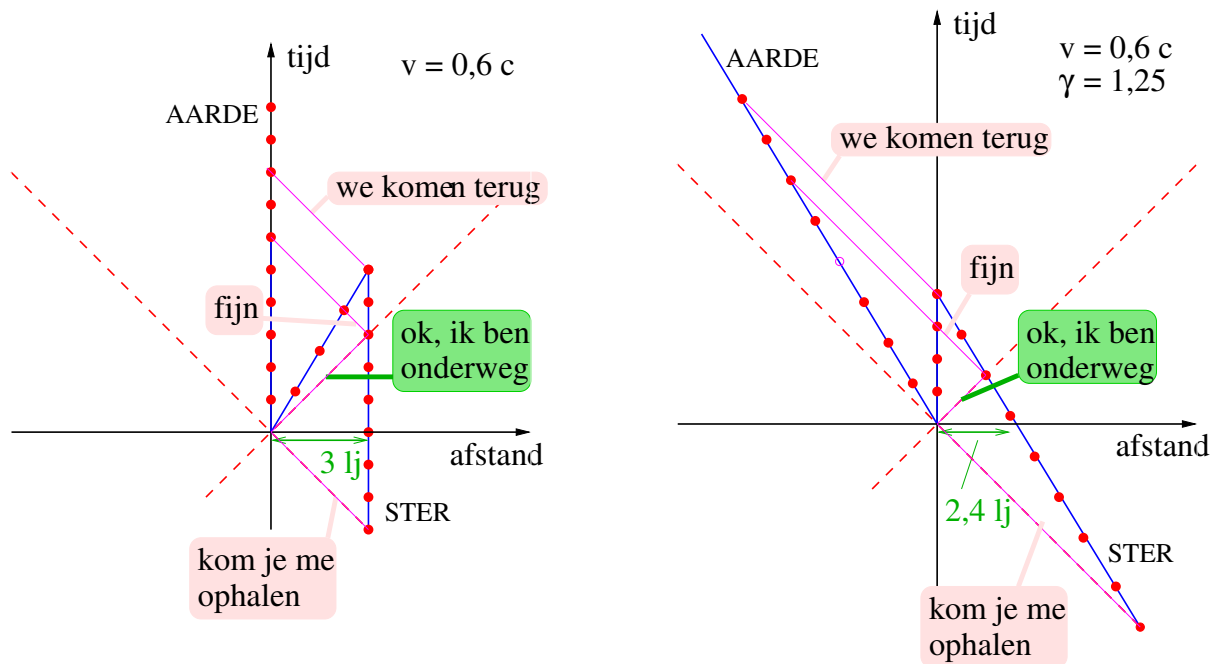
Figuur 3.1: Een rit van universiteit naar station. Ruimte-tijd diagrammen zijn gegeven voor de ‘universiteit’, het ‘station’ en de ‘reiziger’, allemaal in blauw. De rode punten op die lijnen geven tijdstippen aan met 5 minuten tussenpauzes. De trip van universiteit naar station duurt 25 minuten. De uitgewisselde berichtjes zijn op deze schaal instantaan. In het referentiesysteem links zijn ‘universiteit’ en ‘station’ in rust (dus vaste posities), terwijl in het referentiesysteem rechts alles vanuit de ‘reiziger’ is bekeken. Dit is de relativiteit in de klassieke mechanica.

of minder dimensies en nieuwe ruimte-tijd structuren zoals snaren en membranen. Hier-voor zijn vooralsnog geen experimentele aanwijzingen voorhanden, ook al laten de eerdere theorieën nog diverse vragen onbeantwoord, zoals we met name in hoofdstuk 6 zullen zien.

3.1 Speciale relativiteitstheorie

Om de speciale relativiteitstheorie uit te leggen vergelijken we een rit in de stad met een reis naar een (denkbeeldige) ster op 3 lichtjaar afstand. In figuur 3.1 hebben we onze tocht in de stad beschreven, van universiteit naar station om een collega op te halen. Onderweg worden wat berichtjes uitgewisseld. Een van de diagrammen is gemaakt door een collega bij de universiteit, het andere door degene die de bezoeker ophaalt. De verschillen tussen beide diagrammen zijn het gekozen referentiesysteem, respectievelijk ‘de universiteit’ of ‘de ophaler’. De informatie is dezelfde, met name alle stippen (events of gebeurtenissen, vastgelegd door plaats en tijd) zijn in beide diagrammen te vinden. Dat wordt bedoeld met *relativiteit*.

We gaan nu een reis naar een ster op 3 lichtjaren afstand maken. Daarvoor hebben we een raket ter beschikking die een snelheid van 0,6 van de lichtsnelheid kan bereiken, zodat we de reis in principe in 5 jaar kunnen voltooien. Vanzelfsprekend zijn we er op voorbereid dat de berichtjes er wat langer over doen. Bijvoorbeeld het bericht of ‘we iemand kunnen komen ophalen’ is 3 jaar geleden verstuurd. We bekijken de reis weer



Figuur 3.2: Een reis naar een ster op afstand van 3 lj. Ruimte-tijd diagrammen zijn gegeven voor de 'Aarde', de 'ster' en de 'reiziger', allemaal in blauw. De rode punten op de lijnen geven tijdstippen aan met 1 jaar tussenpauzes. De reis naar de ster met een snelheid van $0,6 c$ duurt 5 jaren. Maar dat is vanuit de Aarde (of ster) gezien (het referentiesysteem links). Voor de reiziger duurt het maar 4 jaar vanwege het effect dat bewegende klokken langzamer lopen, de enige manier om de tijdstippen links en rechts kloppend te krijgen (!). De uitgewisselde berichtjes zijn lijnen onder 45 graden. In het referentiesysteem links zijn 'Aarde' en 'ster' in rust (vaste posities). In het referentiesysteem rechts is alles vanuit de 'raket (reiziger)' bekeken. Merk op dat in het rechterplaatje nu de Aarde en ster bewegen en dat nu juist hun klokken langzamer bewegen. De berichten bewegen nog steeds langs lijnen onder 45 graden. En, zoals te zien is bij het vergelijken van de plaatjes links en rechts, kloppen alle tijdsintervallen tussen de diverse gebeurtenissen (events) helemaal. Dat komt juist doordat klokken niet synchroon lopen. Dat is de speciale relativiteitstheorie.

vanuit twee verschillende referentiesystemen, dat van 'aarde (ster)' of dat van de 'raket (reiziger)', weergegeven in figuur 3.2. Een belangrijk verschil met het vorige voorbeeld is dat de signalen die (met de lichtsnelheid) verstuurd worden geen horizontale lijnen meer zijn, maar lijnen onder een hoek, namelijk een hoek van 45 graden in beide figuren, waar we 'jaren' en 'lichtjaren' hebben gekozen als maat langs de assen. Maar juist die hoek is dezelfde in beide referentiesystemen, want de *lichtsnelheid is hetzelfde voor alle waarnemers*, het uitgangspunt van de *speciale relativiteitstheorie*. Het vereist dat de afstanden tussen de tijdstippen voor bewegende klokken groter zijn dan voor stationaire klokken (vertikale lijnen), dus bewegende klokken lopen langzamer.

Een van de consequenties van het feit dat de lichtsnelheid dezelfde is in alle referentiesystemen, is dat de tijd voor een bewegende klok langzamer moet lopen, wat meestal wordt geïllustreerd met een eenvoudig gedachtenexperiment. We zullen dat hier niet herhalen, maar geven gewoon de factor die hierbij een rol speelt. Dat is de befaamde *gammafactor*

voor tijddilatatie en ruimte-contractie,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.1)$$

die afhankelijk is van de verhouding $\beta = v/c$ (zie kader over speciale relativiteitstheorie).

Speciale relativiteitstheorie.

Het verschil tussen de klassieke en de speciale relativiteitstheorie is dat de regels om van het ene referentiesysteem naar het andere te gaan (transformaties) verschillend zijn. Om ze goed te vergelijken kijken we naar tijden t en posities x en vermenigvuldigen we de tijden met de lichtsnelheid (want dan zijn ct en x grootheden met dezelfde dimensie, namelijk lengtes). In het referentiesysteem links in figuren 3.1 en 3.2 geven we tijden en afstanden aan met t en x , in het systeem rechts met t' en x' . Dan geldt

$$\begin{aligned} \text{(Gallilei transformatie):} \quad & ct' = ct \quad \text{en} \quad x' = x - \beta ct \\ \text{(Lorentz transformatie):} \quad & ct' = \gamma ct - \beta \gamma x \quad \text{en} \quad x' = \gamma x - \beta \gamma ct \end{aligned}$$

Voor de Lorentz transformaties is eenvoudig na te gaan dat eigentijden niet veranderen, $x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2$, dus iets wat met de lichtsnelheid beweegt in een systeem, beweegt ook met de lichtsnelheid in elk ander systeem. De ruimte-tijd transformaties doen in beide gevallen niets met de richtingen loodrecht op de bewegingsrichting (y en z).

Met de transformatieregels is eenvoudig na te gaan dat tijdsintervallen van bewegende klokken (Δt) langer zijn dan die voor de klok in rust ($\Delta \tau$), om precies te zijn $\Delta t = \gamma \Delta \tau$. Dit heet *tijddilatatie*. Daarmee correspondeert dat afstanden in de bewegingsrichting korter lijken met eenzelfde factor $\Delta x' = \Delta x / \gamma$. De afstand tot de ster in het besproken voorbeeld is voor de reiziger in de raket slechts 2,4 lichtjaar.

Een bekend voorbeeld waar tijddilatatie een rol speelt, is de leeftijd van bewegende deeltjes. Bijvoorbeeld kosmische straling produceert bij botsingen hoog in onze atmosfeer (zeg 10 km) hele lawines van deeltjes, waaronder muonen met een gemiddelde levensduur van $2 \mu\text{s}$, dus goed voor 600 meter. Maar muonen blijken juist prima geschikt om dergelijke lawines van deeltjes in kosmische straling te detecteren (bijvoorbeeld in HIS-PARC project op scholen). Inderdaad blijken muonen met energieën geproduceerd te worden die gemakkelijk 100 maal hun rustenergie bedragen en dus hebben we te maken met γ -factoren van 100 en leeftijden van $200 \mu\text{s}$. Snelheden optellen gaat relativistisch ook anders. Voor snelheden v_1 en v_2 in dezelfde richting wordt de somsnelheid

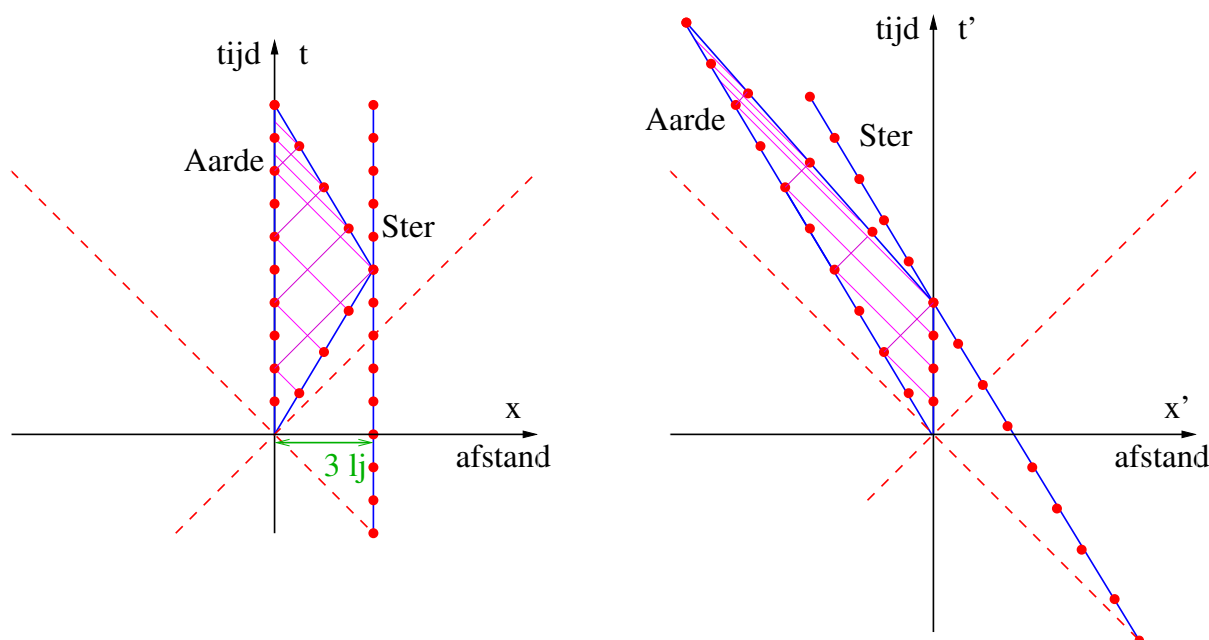
$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Overigens mogen we energieën en impulsen wel gewoon optellen. Gebruikmakend van de eigentijd worden die gegeven door,

$$E = mc^2 \frac{dt}{d\tau} = mc^2 \gamma \quad \text{en} \quad p = m \frac{dx}{d\tau} = mc\beta\gamma,$$

waarmee energie (E) en impuls maal lichtsnelheid (pc) op dezelfde manier transformeren van het ene naar het andere referentiesysteem als ct en x ,

$$E' = \gamma E - \beta \gamma pc \quad \text{en} \quad p'c = \gamma pc - \beta \gamma E.$$



Figuur 3.3: De heen- en terugreis naar een ster. Aan de diagrammen in figuur 3.2 is nu de terugreis toegevoegd. In het tweede geval hebben we het referentiesysteem ongewijzigd gelaten. We zien nu dat de terugkerende raket een snelheid van $0,6c + 0,6c = 0,88c$ (zie kader over speciale relativiteitstheorie) moet hebben om de aarde ‘in te halen’. Net als in het voorgaande kloppen alle gebeurtenissen, inclusief het versturen en ontvangen van diverse berichtjes (in de figuur als magenta lijntjes aangegeven).

Voor snelheid $v = 0$, is de gammafactor gelijk aan 1, voor een snelheid $v/c = 0,6$ is de gammafactor al 1,25, voor een snelheid $v/c = 0,99$ is de gammafactor al 7,1. Voor $v = c$ wordt γ oneindig. De bewegende klok loopt dan ook langzamer en als gevolg daarvan is onze reiziger bij aankomst bij de ster niet 5, maar slechts $5/1,25 = 4$ jaar ouder. In de figuur 3.2 zien we dat de tijdsintervallen voor bewegende klokken (niet-vertikale lijnen) groter zijn. Voor de met de lichtsnelheid bewegende berichtjes staat de klok zelfs stil.

Door de terugreis er aan toe te voegen (figuur 3.3) zien we dat de persoon die met de raket op en neer geweest is uiteindelijk na 8 jaar terug is op Aarde, terwijl daar inmiddels 10 jaar zijn verstreken (de tweeling paradox, raar maar waar). Het maakt niet uit of we dat vanuit het referentiesysteem van de Aarde (en Ster) bekijken of dat we in een bewegend referentiesysteem werken, al is het daarbij wel essentieel om in één plaatje niet van referentiesysteem te wisselen. Verder is het een kwestie van gewoon systematisch te werk gaan in beide referentiesystemen.

3.2 Kwantummechanica

Is speciale relativiteitstheorie misschien al vreemd, kwantummechanica is veel ingrijpender wat concepten betreft. In de klassieke mechanica zijn we gewend een object te beschrijven met een ‘positie’ (zeg de coördinaten x , y en z van de vector $\mathbf{r}$) en een snelheid (de componenten v_x , v_y en v_z van de vector $\mathbf{v}$) waaruit dan ook andere grootheden kunnen worden berekend zoals impuls (de componenten $p_x = m v_x$, $p_y = m v_y$, $p_z = m v_z$ van de

vector $\mathbf{p}$), kinetische energie ($E = \mathbf{p}^2/2m$) of het impulsmoment opgebouwd uit baan-impulsmoment en spin (de componenten zoals $j_z = xp_y - yp_x + s_z$ van de vector $\mathbf{j} = \mathbf{\ell} + \mathbf{s} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mathbf{s}$). In de kwantummechanica moeten we radikaal anders denken. Een object kan worden beschreven als zijnde in een *toestand* ‘psi’, genoteerd als $|\psi\rangle$. In zekere zin lijkt het nog wel op de klassieke mechanica, omdat ‘psi’ zou kunnen staan voor de informatie over het systeem, zoals positie, impuls, energie, lading, etc., bijvoorbeeld voor een gelokaliseerd object $|\mathbf{r}\rangle = |x, y, z\rangle$, voor een bewegend object $|\mathbf{p}\rangle$ of voor een spinnende toestand $|s_z\rangle$.

Maar nu de essentiële verschillen. De mogelijke eigenschappen van een toestand blijken te corresponderen met de uitkomsten van metingen van zo’n eigenschap, bijvoorbeeld een positiebepaling of een snelheidsmeting. De uitkomst van de meting fungeert tevens als selectie van de desbetreffende toestand, $|x\rangle$ of $|p_x\rangle$. Maar en nu komt het, het blijkt onmogelijk om positie en snelheid/impuls beide te bepalen en een toestand $|x, p_x\rangle$ te maken waarvan bij vervolgmetingen zowel de positie als de impuls vastliggen. Dus de toestand $|x, p_x\rangle$ bestaat niet! De grootheden *positie* en *impuls* zijn *incompatibel*. Een unieke bepaling van alledrie de componenten van positie òf alledrie de componenten van de impuls blijkt wel mogelijk.

Vervolgens kijken we naar meting van het impulsmoment langs een bepaalde as. Dat kan bijvoorbeeld voor een geladen deeltje zoals een elektron door naar de afbuiging in een (inhomogeen) magneetveld te kijken. Zo’n magneetveld veroorzaakt een kracht die evenredig is met het impulsmoment (Stern-Gerlach meting). Zonder verder op de details van het meten in te gaan, blijken voor impulsmomenten juist metingen van verschillende componenten incompatibel met elkaar te zijn. Dat heeft zelfs een klassiek analogon, namelijk het feit dat rotaties niet zomaar verwisseld mogen worden. Bovendien blijkt de uitkomst van de meting in een bepaalde richting ook nog eens alleen specifieke waarden op te leveren. Klassiek zou het impulsmoment van een deeltje in rust (de spin) langs een bepaalde richting, s_z , alle waarden van de projectie kunnen aannemen tussen $-|\mathbf{s}| \leq s_z \leq |\mathbf{s}|$. Kwantummechanisch blijken de afgebogen deeltjes in een Stern-Gerlach apparaat slechts discrete waarden op te leveren. Voor een elektron is het resultaat $s_z = m\hbar$ met $m = \pm\frac{1}{2}$. Dit discrete karakter voor het impulsmoment is algemeen. De waarden zijn discreet met tussenstappen van $\hbar$ (de constante van Planck gedeeld door 2π). Voor een elektron in rust zijn er slechts twee mogelijkheden. Men spreekt van een elektron met spin $1/2$. Andere mogelijkheden voor spin zijn toestanden met als z -component van het impulsmoment $s_z = \hbar$, 0 of $-\hbar$, dus $s_z = m\hbar$ met $m = 1, 0$ of -1 . Dit zijn de drie mogelijke toestanden behorende bij een spin 1 deeltje in rust. Macroscopisch merk je niet veel van deze discretizatie, want een massa van 1 kg, rondslingerend aan een touw van 1 m lengte met snelheid 1 m/s, heeft een impulsmoment van $1 \text{ kg m}^2/\text{s} = 1 \text{ Js}$, en dat is toch wel heel veel maal $\hbar$ (ongeveer 10^{34} maal). Terwijl de spin van elementaire deeltjes in halftallige *en* heeltallige veelvouden van $\hbar$ voorkomt, komt het baanimpulsmoment alleen in heeltallige veelvouden van $\hbar$ voor.

Maar we zijn er nog niet. Een fysisch systeem hoeft namelijk niet in een specifieke toestand te zijn. Wat de z -component van spin betreft zijn er voor een spin $1/2$ deeltje twee mogelijke toestanden $|s_z = +\frac{1}{2}\hbar\rangle = |\uparrow\rangle_z$ of $|s_z = -\frac{1}{2}\hbar\rangle = |\downarrow\rangle_z$. Maar een willekeurige spintoestand wordt beschreven als een (lineaire) combinatie of *superpositie* van de twee mogelijke spin toestanden langs de z -as,

$$|\psi\rangle = c_+ |\uparrow\rangle_z + c_- |\downarrow\rangle_z,$$

waarbij c_+ en c_- (complexe) getallen zijn (zie kader).

Toestanden in kwantummechanica.

Kwantumtoestanden corresponderend met een bepaalde eigenschap A kunnen worden gerangschikt als toestanden met welbepaalde uitkomsten $a_1, a_2, \dots$ (*eigenwaarden* genoemd) en corresponderende toestanden $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots$ (*eigentoestanden* genoemd). Een algemene toestand is een lineaire combinatie of *superpositie* van toestanden

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle + \dots,$$

waarbij $c_1, c_2, \dots$ complexe getallen zijn (zie tweede kader), waarvan de lengte in het kwadraat, $|c_i|^2$ de waarschijnlijkheid geeft dat de uitkomst van een meting van grootte A de waarde a_i oplevert. De som van al die kwadraten moet dus netjes één zijn.

Deze manier van schrijven van een toestand is te vergelijken met de ontbinding van een vector $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ in componenten, wat formeel betekent

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z,$$

waar $\mathbf{e}_i$ eenheidsvectoren zijn in drie richtingen. De lengte van de vector wordt gevonden door $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$. De norm van de kwantumtoestand is $\langle \psi | \psi \rangle = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots = 1$. De waarschijnlijkheden worden gevonden door voor iedere ket ($| \rangle$) een bra-toestand te introduceren $\langle \psi | = c_1^* \langle a_1 | + c_2^* \langle a_2 |$. Net als bij vectoren geven matchende combinaties 1 en de rest geeft nul, dus $\langle a_1 | a_1 \rangle = 1$, $\langle a_2 | a_1 \rangle = 0$, enz. De waarschijnlijkheid om a_i te meten is dan het product van amplitudo's $\langle \psi | a_i \rangle \langle a_i | \psi \rangle = c_i^* c_i = |c_i|^2$.

Complexe getallen.

Complexe getallen zijn opgebouwd uit een reëel deel en een imaginair deel, waar

$$z = \Re z + i \Im z \quad \text{en} \quad z^* = \Re z - i \Im z,$$

de complex geconjugeerde van z is. Via $i^2 = -1$ kunnen we eenvoudig rekenen met complexe getallen. De gekwadrateerde lengte van een complex getal wordt gegeven door

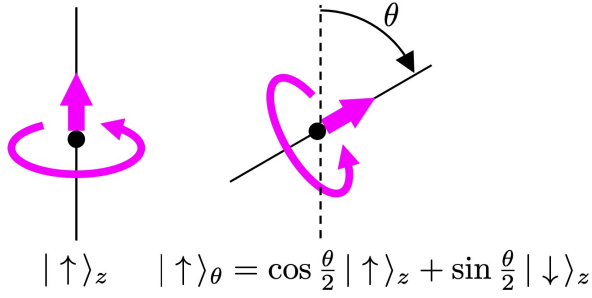
$$|z|^2 = (\Re z)^2 + (\Im z)^2 = z z^*.$$

Complexe getallen met lengte 1 kunnen geschreven worden als

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Wanneer we van een dergelijke toestand met een Stern-Gerlach apparaat het impuls-moment s_z proberen te meten, blijkt de uitkomst onvoorspelbaar, die is namelijk $s_z = +\frac{1}{2}\hbar$ of $s_z = -\frac{1}{2}\hbar$. Wanneer het experiment een groot aantal keren herhaald wordt, iedere keer beginnend met eenzelfde toestand $|\psi\rangle$, dan blijkt dat de waarschijnlijkheid om $s_z = +\frac{1}{2}\hbar$ te vinden gelijk is aan $|c_+|^2$, terwijl de waarschijnlijkheid om $s_z = -\frac{1}{2}\hbar$ te vinden gelijk is aan $|c_-|^2$. Om alle mogelijke kwantumtoestanden te kunnen beschrijven blijken complexe getallen c_+ en c_- nodig te zijn. Niet alleen $c_+ = 1$ en $c_- = 0$ of $c_+ = 0$ en $c_- = 1$, maar alle mogelijke combinaties zodanig dat de som van de absolute waarden in het kwadraat gelijk is aan 1. Dergelijke toestanden heten genormeerd en garanderen het behoud van waarschijnlijkheid.

Hierboven is al opgemerkt dat voor impulsmoment verschillende componenten incompatibel zijn. Het is echter wel mogelijk de x -component van de spin te meten en het



Figuur 3.4: Spin is ook in QM een vectorgrootte met richting met voor elke richting 2 projecties, spin up of down met spin $\pm\frac{1}{2}\hbar$. En die twee spintoestanden bestrijken als basistoestanden dezelfde kwantumruimte. Dus spin up langs een andere richting (bijvoorbeeld onder hoek θ met z-as) is een lineaire combinatie van de twee spin toestanden langs de z-as.

resultaat geeft voor een elektron ook weer de waarden $\pm\frac{1}{2}\hbar$ en de corresponderend toestanden kunnen we $|s_x = +\frac{1}{2}\hbar\rangle = |\uparrow\rangle_x$ en $|s_x = -\frac{1}{2}\hbar\rangle = |\downarrow\rangle_x$ noemen. Wanneer we starten met een van deze toestanden en opnieuw s_z meten dan blijken ook de spintoestanden langs de x-as superposities te zijn van de twee toestanden langs de z-as,

$$|\uparrow\rangle_x = \sqrt{\frac{1}{2}}|\uparrow\rangle_z + \sqrt{\frac{1}{2}}|\downarrow\rangle_z \quad \text{en} \quad |\downarrow\rangle_x = \sqrt{\frac{1}{2}}|\uparrow\rangle_z - \sqrt{\frac{1}{2}}|\downarrow\rangle_z.$$

Idem dito blijken er twee s_y -toestanden te bestaan, die ook uitgedrukt kunnen worden als superpositie van de twee s_z -toestanden,

$$|\uparrow\rangle_y = \sqrt{\frac{1}{2}}|\uparrow\rangle_z + i\sqrt{\frac{1}{2}}|\downarrow\rangle_z \quad \text{en} \quad |\downarrow\rangle_y = \sqrt{\frac{1}{2}}|\uparrow\rangle_z - i\sqrt{\frac{1}{2}}|\downarrow\rangle_z,$$

waarbij nu een van de coëfficiënten een imaginair getal is. Een geselecteerde s_x - of s_y -toestand geeft bij meting van de z-component s_z de waarden $\pm\frac{1}{2}\hbar$ met kansen van 50%.

Een spinmeting in een willekeurige richting $\hat{n}$ geeft ook twee uitkomsten voor $s_n = \mathbf{s} \cdot \hat{n}$. Als de richting gekarakteriseerd wordt met poolcoördinaten θ (hoek tussen $\hat{n}$ en z-as) en φ (rotatiehoek om de z-as vanaf x-as) worden de spin-up toestand langs die richting, $|s_n = +\frac{1}{2}\hbar\rangle = |\uparrow\rangle_n$, gegeven door

$$|\uparrow\rangle_n = \cos(\theta/2) |\uparrow\rangle_z + \sin(\theta/2) e^{i\varphi} |\downarrow\rangle_z.$$

$|\uparrow\rangle_x$ en $|\uparrow\rangle_y$ zijn bijzondere gevallen hiervan (zie ook fig. 3.4). Voor degenen die vertrouwd zijn met methoden in de lineaire algebra, is de kwantummechanica voor een spin 1/2 systeem (zoals een elektron) het werken met de twee complexe getallen c_+ en c_- , die de toestand in de 2-dimensionale spinruimte vastleggen (na de keuze van de basistoestanden). De spin operatoren kunnen dan worden beschreven als 2×2 matrices (de Pauli matrices). Het is het bekendste voorbeeld van de matrix kwantummechanica van Heisenberg. Spin toestanden zijn ook *het* voorbeeld van qubits in de kwantum informatica.

De twee halftallige spintoestanden van een elektron signaleren een bijzondere intrinsieke eigenschap van fermionen, namelijk ze leven in een 2-dimensionale kwantum wereld (Hilbert ruimte) met daarin matrix operatoren zoals hierboven genoemd. De structuur van die spin operatoren $\mathbf{s}$, met name gedrag onder verwisseling, is exact dezelfde als die van baanimpulsmomenten $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ en ze gedragen zich ook in wisselwerking met magnetische velden op eenzelfde manier, vandaar dat we ze gewoon intrinsiek baanimpulsmoment noemen. Het is vaak zelfs handig om baanimpulsmoment en spin op te tellen tot $\mathbf{j}$, net als klassiek gebeurt. Het fermion of boson karakter gaat daarbij niet verloren want bij het optellen van heeltallige baanimpulsmomenten bij halftallige spins (fermionen) of bij

heeltallige spins (bosonen) blijft half- of heel-talligheid behouden in het totaal impulsmoment. We zullen ook elementaire deeltjes met heeltallige spins (in het bijzonder spin 0 en spin 1) tegenkomen. We zullen later ook zien dat het voor deeltjes handig kan zijn om de bewegingsrichting als rotatieas te kiezen. Deze spintoestanden worden *heliciteiten* genoemd (rechtsdraaiend en linksdraaiend als bij een schroef).

In het geval van oneindig veel basistoestanden, bijvoorbeeld als het om toestanden met welbepaalde positie, $|x\rangle$, of om impulstoestanden $|p_x\rangle$ gaat, is de meest algemene toestand ook een lineaire combinatie van $|x\rangle$ toestanden,

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(x) |x\rangle.$$

We hebben hier een integraal wat in feite niets anders is dan een oneindige som over toestanden, $\sum_x \rightarrow \int dx$. De complexe getallen $\psi(x)$ zijn niets anders dan de continue versie van de discrete coëfficiënten c_x . In het continue geval zijn de oneindig vele coëfficiënten $c_x \rightarrow \psi(x)$ precies de functiewaarden van een functie, de golffunctie ψ . Nog steeds wordt (net als bij de c'tjes) de waarschijnlijkheid dat het systeem in toestand $|x\rangle$ is gegeven door $|\psi(x)|^2 = |\langle x|\psi\rangle|^2$. Dat is dus de waarschijnlijkheid dat een positiemeting x oplevert. De som van alle waarschijnlijkheden moet weer 1 opleveren,

$$\sum_x |c_x|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x)|^2 = 1,$$

voor een genormeerde golffunctie. Dit is de golfmechanica van Schrödinger. Maar in termen van Dirac's ket-toestanden is er in wezen geen enkel verschil met de matrixmechanica van Heisenberg, behalve een eindig aantal spin-toestanden versus een oneindig aantal positie-toestanden

Het verband tussen energie en tijd vormt de basis van de kwantummechanica. Energie wordt net als positie, impuls of impulsmoment een operator, de *Hamiltoniaan* of *energie-operator* genoemd, die beschrijft hoe een systeem in de tijd verandert

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle. \quad (3.2)$$

Als we toestanden hebben met welbepaalde energie genoteerd als $|E_n\rangle$ ligt de energie vast, wat betekent dat het een zogenaamde eigentoestand van de Hamiltoniaan is, dus $H |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle$. Dan is de vergelijking direct op te lossen en weten we de oplossing op ieder tijdstip,

$$|E_n(t)\rangle = e^{-iE_n t/\hbar} |E_n\rangle = e^{-i\omega_n t} |E_n\rangle,$$

waar ω_n gerelateerd aan energie via $E_n = \hbar\omega_n$ de (hoek)frequentie is. De oplossing verandert in de tijd dus slechts met een fase met absolute waarde $|e^{-i\omega t}| = 1$, dus waarschijnlijkheden veranderen niet bij metingen. Dit heet een *stationaire toestand*. Het wordt pas interessant als we beginnen met een beginsituatie die opgebouwd is uit verschillende energietoestanden, bijvoorbeeld als

$$|\psi(0)\rangle = c_1 |E_1\rangle + c_2 |E_2\rangle,$$

dan is

$$|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-i\omega_1 t} |E_1\rangle + c_2 e^{-i\omega_2 t} |E_2\rangle = e^{-i\omega_1 t} (c_1 |E_1\rangle + c_2 e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} |E_2\rangle).$$

De impulsoperator en de onzekerheidsrelatie

Het verband tussen symmetrie in de tijd en energie wordt in de kwantummechanica expliciet gemaakt in de energieoperator of Hamiltoniaan. Net zo wordt het verband tussen symmetrie in positie en impuls in de kwantummechanica expliciet in de werking van de impulsoperator p_{op} . De operator werkt op de functies $\psi(x)$ als differentiëren naar de plaats, $p_{op} = -i\hbar \partial/\partial x$. Iedere richting heeft z'n eigen afgeleide, dus in drie dimensies $\mathbf{p}_{op} = -i\hbar \nabla$. Terwijl de Hamiltoniaan beschrijft hoe een toestand verandert in de tijd, ‘meet’ de impulsoperator hoe een toestand $|\psi\rangle$ verandert in de ruimte. Een speciale functies, waar de impulsoperator de functie niet verandert, is de exponentiële functie e^{ikx} ,

$$p_{op} e^{ikx} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{ikx} = \hbar k e^{ikx}.$$

Dat is de golf functie van een impuls-eigen toestand met een welbepaalde impuls $p = \hbar k$,

$$|p\rangle \propto \int dx e^{ikx} |x\rangle \quad \text{of} \quad |x\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} |p\rangle.$$

Deze functies heten vlakke golven, in drie dimensies $\exp(ikx) \rightarrow \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$. De golf-functie heeft een fase die periodiek verandert als functie van de plaats met een golflengte $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}| = h/|\mathbf{p}|$, net zoals de faseverandering in de tijd voor een energie-eigen toestand periodiek is in de tijd met frequentie $f = 2\pi/\omega = h/E$. De waarschijnlijkheid dat een positiebepaling x oplevert is voor een vlakke golf constant, $|\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})|^2 = 1$.

In het algemeen blijkt dat we voor genormeerde (maar wel uitgesmeerde) toestanden met een bepaalde golf functie $\psi(x)$ en daarmee corresponderende positiewaarschijnlijkheden $|\psi(x)|^2$ netjes een gemiddelde positie en een standaardafwijking Δx kunnen berekenen. We kunnen hetzelfde doen voor impulsmetingen en vinden dan ook een uitgesmeerde waarschijnlijkheidsverdeling met standaardafwijking Δp . Positie en impuls zijn niet compatibel en dat vertaalt zich in relaties voor elke richting,

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2},$$

de befaamde positie-impuls onzekerheidsrelatie.

Gaande van $t = 0$ naar $t = \pi/(\omega_2 - \omega_1)$ verandert de toestand $c_1 |E_1\rangle + c_2 |E_2\rangle$ in de toestand $c_1 |E_1\rangle - c_2 |E_2\rangle$ en dat kan bij spins bijvoorbeeld juist het omklappen van de spin van $|\uparrow\rangle_x$ naar $|\downarrow\rangle_x$ betekenen (zie de eerder besproken spintoestanden). Met gebruik van magneetvelden krijgen spintoestanden van elektronen in een atoom ieder hun eigen energie. De grootte van de energiever verschillen en dus de omklap frequenties hangen af van de soort atomen. Het volgen van tracers in het lichaam met stationaire en ronddraaiende magneetvelden, is het basis principe achter de medische diagnostiek van *magnetic resonance imaging* (MRI).

Net als in de klassieke mechanica wordt een theorie bepaald door een kracht of daarmee samenhangende potentiële energie $U(\mathbf{r})$ via $\mathbf{F} = -\nabla U$. Door de uitdrukking voor de energie,

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + U(\mathbf{r}), \quad (3.3)$$

Golfpakketjes

Een golffunctie die op tijdstip $t = 0$ een bepaalde vorm heeft evolueert in de tijd. Door te ontwikkelen in vlakke golven (Fourier analyse) vinden we

$$\psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} F(k - k_0) e^{ikx} \implies \psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} F(k - k_0) e^{ikx - i\omega_k t}$$

Het resultaat heeft de vorm van een lopende golf, die afhankelijk van de profielvorm $F(k - k_0)$ ook nog dissipatie vertoont. Als het profiel scherp genoeg gepiekt is rond één impuls $p_0 = \hbar k_0$ kunnen we in de buurt van k_0 de frequenties $\omega(k)$ benaderen met

$$\omega(k) \approx \omega_0 + v_0(k - k_0), \text{ met } \omega_0 = \omega(k_0) \text{ en groepssnelheid } v_0 = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}.$$

We krijgen een ‘lopend golfpakket’

$$\psi(x, t) \approx \psi(x - v_0 t, 0) e^{ik_0 x - \omega_0 t}.$$

Afhankelijk van de *dispersie* $\omega(k)$ en het profiel $F(k - k_0)$ zal de exacte oplossing een golfpakket zijn dat in de tijd dissipeert. De dispersierelatie van een deeltje met massa M is $\omega(k) = \sqrt{k^2 c^2 + M^2 c^4 / \hbar^2}$ en we zien dat de groepssnelheid precies de relativistische uitdrukking voor de snelheid, $v_0/c = k_0 c / \omega_0 = p_0 c / E_0$, is.

als operator-vergelijking op te schrijven waarin $H = E_{\text{op}} = i\hbar \partial/\partial t$ en $\mathbf{p}_{\text{op}} = -i\hbar \nabla$ (zie kader over de impulsoperator) en dit los te laten op de golffunctie $\psi(\mathbf{r}, t)$ vinden we

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.4)$$

Dit is de Schrödinger vergelijking en die kan gebruikt worden om bijvoorbeeld de energie-eigentoestanden van het waterstofatoom te vinden als we de Coulomb potentiaal voor geladen deeltjes gebruiken, de basis van atoom- en molecuulfysica die in het volgende hoofdstuk ter sprake komt.

Een mooi voorbeeld van golffuncties zijn golfpakketjes en hun evolutie in de tijd in de afwezigheid van krachten beginnende met een golffunctie $\psi(x, 0)$. In dat geval zijn de eigenfuncties vlakke golven, dus we moeten de golffunctie ontbinden in vlakke golven, wat betekent een Fourier analyse maken van de x -afhankelijkheid. Dat is beschreven in het kader. Iedere vlakke golf heeft een bekende tijdsevolutie, de fase $e^{-i\omega_k t}$ met $E_k = \hbar\omega_k$, waar ω_k de frequentie is horende bij golfgetal k . In het algemeen is de energie afhankelijk van het golfgetal dat loopt van $-\infty < k < \infty$ via de dispersierelatie $\omega_k = \omega(k)$. Met superposities van de tijdsafhankelijke vlakke golven $|\psi(x, t)\rangle = |\omega, k\rangle e^{-i\omega t + ikx}$ die naast de energie $E = \hbar\omega$ wordt gekenmerkt door de impuls, $p = \hbar k$, krijgen we dan lopende golfpakketjes (zie kader). Deze golf beweegt met de groepssnelheid $v_0 = d\omega/dk$, al zal deze golf afhankelijk van de vorm ook dissiperen.

met bijbehorende golffuncties,

$$\Phi(t, x) = \sum_n f_n(t, x) a_n + f_n^*(t, x) a_n^\dagger. \quad (3.5)$$

De afhankelijkheid van ruimte en tijd van het veld vinden we terug in de golffuncties, het aantal mogelijkheden zoals impuls mogelijkheden of spintoestanden in de sommatie index n , wat natuurlijk ook (deels) integralen kunnen zijn zoals we eerder zagen in de vorige paragraaf. Terwijl in de gewone kwantummechanica de spin vrijheidsgraad in wezen een onafhankelijke nieuwe vrijheidsgraad was, is die in kwantumveldentheorieën sterk verwoven met plaats en tijd (of energie en impuls). Spin en baanimpulsmoment kunnen in principe niet meer afzonderlijk worden gemeten, dat is enkel voorbehouden aan het totale impulsmoment van een systeem. En als klap op de vuurpijl komt daar ook nog eens het zogeheten *spin-statistiek theorema* bij: het blijkt dat de golffunctie van een systeem opgebouwd uit identieke deeltjes met heeltallige spin onder verwisseling van twee zulke deeltjes (*bosonen* genoemd) niet verandert (Bose-Einstein statistiek), terwijl de golffunctie van een systeem opgebouwd uit identieke deeltjes met halftallige spin (*fermionen* genoemd) onder verwisseling van twee indetieke excitaties verandert in minus zichzelf (Fermi-Dirac statistiek). De bekendste consequentie van dit laatste is de situatie voor elektronen in een atoom. Elektronen hebben halftallige spin en zijn dus fermionen. Als twee elektronen in een atoom in banen a en b zitten beschrijft het product van de golffunctie de excitatie van twee elektronen, de twee-elektron toestand. Fermi-Dirac statistiek vereist dat de uiteindelijke golffunctie $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_a(\mathbf{r}_1) f_b(\mathbf{r}_2) - f_b(\mathbf{r}_1) f_a(\mathbf{r}_2))$ wordt. Zo'n golffunctie heeft op natuurlijke wijze ingebouwd dat de waarschijnlijkheid $|\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r})|^2$ om de elektronen op dezelfde plaats te vinden nul is. Maar als de elektronen in dezelfde banen (dus $a = b$) zitten, zorgt de antisymmetrisatie er voor dat $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0$, dus de golffunctie is overal nul oftewel zo'n twee-elektron toestand bestaat niet. Dit staat bekend als het *Pauli uitsluitingsprincipe* dat zegt dat twee fermionen niet in dezelfde toestand kunnen zijn. Voor de bosonen met heeltallige spin kan dat juist wel. Ze kunnen zelfs allemaal in de laagste energietoestand gaan zitten, wat bekend staat als een *Bose-Einstein condensaat*. Het spin-statistiek verband was al ver voor de ontwikkeling van kwantumveldentheorie bekend, maar was volkomen ad-hoc. In kwantumveldentheorie is het een noodzaak voor een consistente theoretische opbouw.

Kwantumveldentheorieën zijn ook ideaal geschikt om de consequenties van alle mogelijke symmetrieën in de beschrijving van deeltjes en krachten in te bouwen. Daar vallen bijvoorbeeld de fundamentele symmetrieën van ruimte en tijd onder, de translaties en Lorentz transformaties (rotaties en boosts). Dat geeft aanleiding tot behouden grootheden en bijbehorende stromen, die netjes voldoen aan continuïteitsvergelijkingen. Net als lading, kan energie best stromen, maar niet verdwijnen. Nu is energie en energiestroom niet hetzelfde als lading en elektrische stroom, maar ook dat zit er allemaal in. Bijvoorbeeld deeltjes en antideeltjes hebben beide positieve energie, maar tegengestelde elektrische lading.

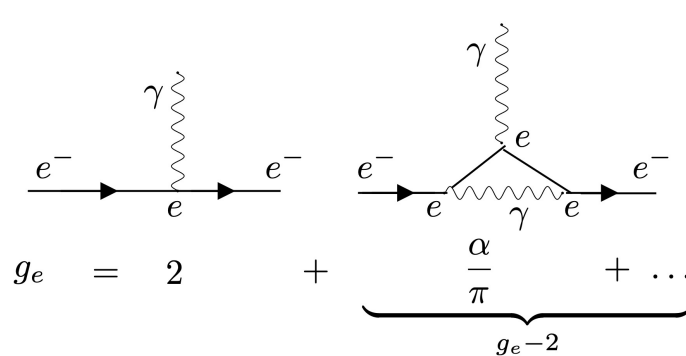
Maar de mooiste symmetrieën in kwantumveldentheorie zijn zonder twijfel de zogenaamde ijk-symmetrieën. In de kwantummechanica speelt een globale fase in de golffunctie voor één deeltje geen rol. Bijvoorbeeld voor een spintoestand is het enige wat van belang is of er bijvoorbeeld een relatief plus- of minteken tussen de bijdragen zit (zoals bij de spin-toestanden langs de x -as uitgedrukt in die ten opzichte van de s_z -toestanden, of dat de ene bijdrage imaginair is en de andere reëel (zoals bij de spin-toestanden langs de y -as).

In principe zou zelfs op iedere plaats afzonderlijk de fase vastgelegd kunnen worden. Dit heet lokale ijsymmetrie. Maar wat blijkt, juist door deze vrijheid te gebruiken voor elektrische lading, kunnen we elektrische en magnetische krachten die deze ladingen voelen vertalen in vloeiende, continu samenhangende, veranderingen van deze fases over de hele ruimte, waarbij voor de golffunctie van één deeltje het faseverschil tussen twee punten wordt bepaald door de lading van het deeltje en het elektromagnetische potentiaalveld. Voor degenen die bekend zijn met elektrodynamica, corresponderen de elektrische en magnetische velden met een elektrostatistische potentiaal *en* een magnetische vector-potentiaal. Het resulterende raamwerk is de *kwantumelektrodynamica* (QED), de kwantumveldentheorie die de elektromagnetische wisselwerkingen van elektronen en fotonen beschrijft. De fotonen zijn de deeltjes of kwanta (de ket-toestanden met onder andere een welbepaalde energie en impuls) gecreëerd door het elektromagnetische potentiaalveld.

Een van de beperkingen van kwantumveldentheorieën, zit in het gebruik ervan. In de meeste gevallen is het alleen maar mogelijk om te starten met de relativistische vlakke golven als de relevante golffuncties in vgl 3.5, de vrije veld expansie, en moeten de wisselwerkingen via *storingsrekening* meegenomen worden. Net als in de kwantummechanica is het uitgangspunt een lagrangiaan functie die kinetische en potentiaaltermen bevat die beschrijven wat voor soort vrijheidsgraden er zijn, hoe ze met elkaar samenhangen, etc. Deze functie bevat de velden gekoppeld niet via energie-impuls of ruimte tijd, maar puur producten van velden op hetzelfde punt in ruimte-tijd (lokale interacties) en Lorentz invariante grootheden zoals massa's en ladingen. Bijvoorbeeld de wisselwerking tussen geladen elektronen wordt beschreven met behulp van Dirac velden voor de elektronen met massa en het massaloze elektromagnetische veld. Richard Feynman vertaalde de oplossing in de vorm van een wiskundige reeks die heel intuïtief de wisselwerking beschrijft als een uitwisseling van fotonen, beginnende met de uitwisseling van één foton wat al de Coulomb potentiaal oplevert, etc.

Een mooi voorbeeld van storingsrekening is de wisselwerking met het magnetisch veld komend van het magnetisch moment. Voor een elektron met lading e en massa m_e wordt dit in een atoom bepaald door het baanimpulsmoment en spin,

$$\mu_e = \frac{e}{2m_e} (\ell + g \mathbf{s}).$$



Figuur 3.6: *Diagrammatische bijdragen aan het magnetisch moment van een fermion. De bijdrage van het laagste orde diagram (links) is $g = 2$, veruit de belangrijkste bijdrage. Hogere orde diagrammen geven het anomaal magnetisch moment, dus per definitie $g - 2$, waarvan het een-lus-diagram weer veruit de belangrijkste bijdrage geeft.*

Het verschil in de bijdrage van baanimpulsmoment en spin is de factor g . Gebruik van de Dirac vergelijking geeft de waarde $g = 2$, een resultaat wat wel twee maal groter is dan de klassieke elektrodynamica van roterende ladingsverdelingen zou doen vermoeden. Diagrammatisch is dat het eerste diagram in fig. 3.6. Maar het meenemen van hogere orde correcties in de veldentheoretische beschrijving via Feynman diagrammen, corresponderend met de emissie en absorptie van een extra foton in het process, geeft een bijdrage met als resultaat $g = 2(1 + \alpha/2\pi)$, waar $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c \approx 1/137$, dus $g/2 = 1,001\,162$. Dit is een voorbeeld waar theorie en experiment wedijveren, want zowel de berekening als de precieze meting van g zijn fysische topprestaties. Het magnetisch moment is nu bekend en begrepen tot op 14 decimalen, tenminste voor een elektron, $g_e/2 = 1,001\,159\,652\,180\,9$. Zo kan ook het verschil met het zwaardere muon, $g_\mu/2 = 1,001\,165\,921$ ons van alles leren over tweede en hogere order correcties. Dit komt nu allemaal nog even uit de lucht vallen, maar we komen in hoofdstuk 6 terug op berekeningen met Feynman diagrammen, nadat we in hoofdstuk 4 de deeltjeswereld hebben besproken.

3.4 Algemene relativiteitstheorie

Voordat we naar dat volgende hoofdstuk gaan, willen we als smaakmaker nog kort even de verfijning van de speciale relativiteitstheorie naar de algemene relativiteitstheorie noemen. Dit is in feite de door Einstein gerealiseerde beschrijving van interacties tussen massa's tengevolge van een kromming van de ruimte. Hierbij zijn al wel aspecten van veldentheorie van belang, zoals het bestaan van energie- en impuls-stromen die vertellen hoe energie en impuls zich kunnen verdelen over ruimte en tijd. De energie en impuls worden beschreven met een viervector p^μ . Voor de dynamica en bijbehorende energie- en impuls-stromen is een ingewikkelder structuur nodig, in ieder ruimte-tijd punt $x = (t, \mathbf{r})$ de energie-impuls tensor $T_{\mu\nu}(x)$ (rang 2, d.w.z. in principe 16 grootheden), maar zodanig samenhangend dat behoud van energie en impuls netjes gegarandeerd is. Bijvoorbeeld de component T_{00}

De metriek

We hebben het al over 3-vectoren en 4-vectoren gehad, hun notaties als 3 getallen (ruimte) of 4 getallen (tijd + ruimte) en de bijbehorende expansie in eenheidsvectoren, wat voor 4-vectoren betekent

$$x = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3.$$

In de Minkowski ruimte zijn er dus vier basisrichtingen, een tijd-richting e_0 en 3 ruimte-richtingen e_i ($i = 1, 2, 3$), oftewel een set $\{e_\mu \text{ } (\mu = 0, 1, 2, 3)\}$, een tetrad of *vierbein* van eenheidsvectoren met een Minkowski structuur die naar voren komt in de metriek, het inproduct van de eenheidsvectoren, $e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu}$ met $g_{00} = 1$ en $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ ongelijk aan nul en alle andere $g_{\mu\nu}$'s nul. De metriek beschrijft dus het inproduct $x \cdot y = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. In de algemene relativiteitstheorie wordt dit een plaatsafhankelijk assenstelsel, in ieder punt nog steeds een tetrad, maar die zich als functie van tijd en plaats $x = (t, \mathbf{r})$ kan heroriënteren. Die heroriëntatie signaleert kromming van de ruimte-tijd. De metriek is een rang-2 tensor waarvan de variatie, d.w.z. de kromming van de ruimte, wordt beschreven door een (rang-4) Riemann tensor in ieder ruimte-tijd punt.

representeert de energiedichtheid

In een gekromde ruimte beschreven met een rang-4 Riemann tensor, wordt een deel van de kromming, beschreven met de rang-2 Ricci tensor $R_{\mu\nu}$. In combinatie met de rang-2 metriek krijgen we een grootte die net zo mooi samenhangt als energie en impuls. Door deze grootheden in elk ruimte-tijd punt aan elkaar gelijk te stellen met Newton's constante G_N als omrekeningsfactor krijgen we de dynamica die we kennen als zwaartekracht. De relatie ziet er eenvoudig uit,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = 8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

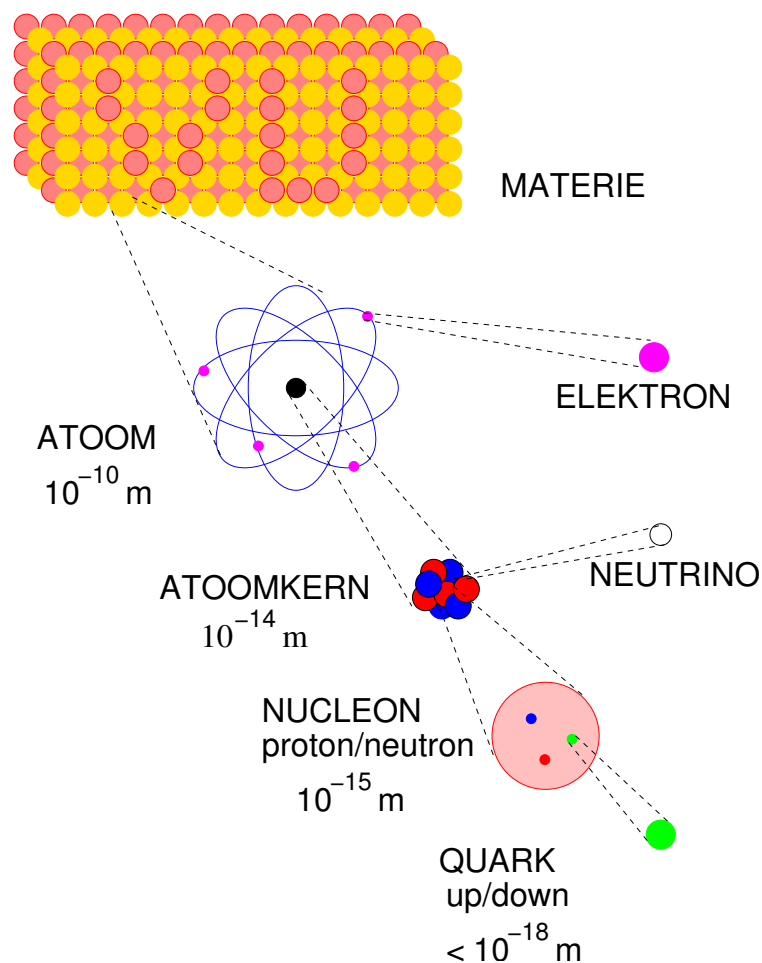
De extra term $g_{\mu\nu} \Lambda$ kon in principe niet uitgesloten worden. En hoewel Einstein die toevoeging zijn 'grootste blunder' noemde, blijkt die essentiëel te zijn als we de vergelijking op het hele heelal toepassen. Zo'n term blijkt dan nodig te zijn om de waargenomen versnelde uitdijning te begrijpen. Andere consequenties van dit verband zijn het bestaan van zwarte gaten en energiestromen die zich als gravitatiegolven door de lege ruimte kunnen bewegen. Maar het bovenstaande blijft in wezen 'klassiek'. In hoofdstuk 6 komen we op terug op kromming en zullen we ook zien hoe klein de kromming is horende bij een massa. Het lijkt onmogelijk om van het geheel een consistente kwantumveldentheorie te maken als we ons beperken tot de bekende 3+1 ruimte-tijd dimensies.

En nu gaan we kijken hoe we al deze concepten tegenkomen.

Hoofdstuk 4

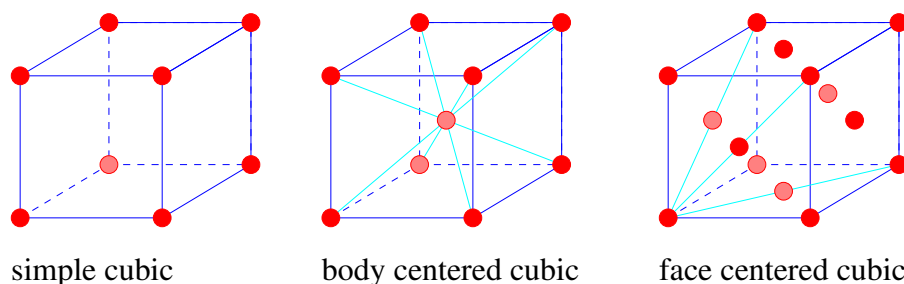
Wie het kleine niet eert ...

Materie komt in een enorme diversiteit, in vaste vorm, in gasvorm of in vloeistofvorm. Gegeven een van deze fases, is er nog eens een ongelooflijke verscheidenheid in vorm, hardheid, kristalstructuur of geleidingsvermogen. Al de materie is uiteindelijk opgebouwd uit atomen (figuur 4.1). Deze zijn zeker niet ondeelbaar wat de van het Griekse a-tomos afgeleide naam suggereert, maar hun substructuur is voor de macroscopische wereld vaak



Figuur 4.1: *Opbouw van de subatomaire wereld.*

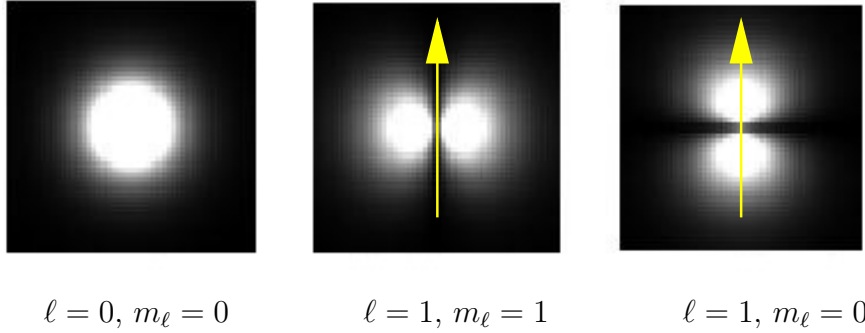
niet zo belangrijk. Het aantal atomen is beperkt, het zijn er zo'n honderd. In de materie kunnen de atomen gerangschikt zijn in de perfecte regelmaat van kristallen (zie figuur 4.2), waar miljarden $\times$ miljarden atomen perfect uitgelijnd de meest prachtige drie-dimensionale structuren vormen, of ze bewegen vrijelijk in vloeistoffen of gassen. De hoeveelheid stoffen is echter veel groter dan het aantal atomen, omdat atomen onder omstandigheden zoals we die hier op Aarde hebben bij voorkeur ook nog eens verbindingen met elkaar aangaan, om moleculen te vormen zoals water, H_2O , bestaande uit 2 Waterstof (H) en 1 Zuurstof (O) atoom, of door regelmatige structuren te vormen van afwisselend verschillende atomen zoals Natrium (Na) en Chloor (Cl) in zoutkristallen.



Figuur 4.2: Voorbeelden van roosterstructuren in de materie zijn kubische roosters. In de figuur staan de varianten ‘simple cubic’ (sc), ‘body-centered cubic’ (bcc; met een atoom in het midden van elke kubus) en ‘face-centered cubic’ (fcc; in het midden van elke zijde ook een atoom). Het fcc rooster heeft de dichtste pakking.

4.1 Atomen

De circa 100 atomen kunnen netjes worden gerangschikt in het periodiek systeem van de elementen (figuur 4.3). Om de elementaire verschillen tussen de atomen te begrijpen, in het bijzonder hun atoomgetal, hun massa's alsmede hun gedrag in relatie tot andere atomen, is de substructuur van het atoom zelf van groot belang. De atomen met afmetingen van de orde van 10^{-10} m zijn opgebouwd uit een atoomkern met daar aan gebonden elektronen. De atoomkern, die 10 000 maal kleiner is dan het atoom, bevat praktisch alle massa. Het is een beetje vergelijkbaar met het zonnestelsel, waar ook bijna alle massa in de Zon geconcentreerd is. Hoewel, de middellijn van de Zon is maar 100 maal kleiner dan de aardstraal. Ook de aard van de krachten in Zonnestelsel (gravitatie) is verschillend van die in het atoom. In beide gevallen is de potentiële energie omgekeerd evenredig met de afstand en de kracht is omgekeerd evenredig met de afstand in het kwadraat, maar in het waterstofatoom zijn niet de massa's de bron van de kracht, maar de elektrische ladingen. Een atoomkern is elektrisch positief geladen, terwijl de elektronen negatief geladen zijn. Het is deze elektrische aantrekking tussen tegengestelde ladingen die zorgt voor de binding van de elektronen. In het periodiek systeem is het de lading van de atoomkern die bepaalt met welk element we van doen hebben. Die lading is $+Ze$, te weten een geheel aantal (Z) maal de elementaire lading e en wordt in een neutraal atoom gecompenseerd door Z elektronen met elk negatieve lading $-e$. Zo heeft Waterstof (H) atoomgetal $Z = 1$, bestaande uit een atoomkern met daaromheen één elektron, Helium (He) heeft atoomgetal



Figuur 4.4: Elektronconfiguraties in het atoom met specifieke baanimpulsmoment kwantumgetallen. Voor het magnetische (m_ℓ) kwantumgetal is specificatie van een richting belangrijk.

Het impulsmoment is gekwantiseerd in veelvouden van $\hbar$, de gereduceerde constante van Planck. In feite is bovenstaande (Bohr) kwantisatie algemener en moet n niet alleen worden gezien als het aantal golven dat past op een cirkelbaan (meestal aangegeven met het baanimpulsmoment ℓ), maar is ook het aantal knopen in de golf functie in de radiële richting van belang (zie kader). Wat betreft het baanimpulsmoment, blijkt er voor $\ell = 0$ maar één golfpatroon mogelijk, voor $\ell = 1$ zijn er drie mogelijke patronen, corresponderend met specifieke rotaties om een gegeven as. Deze worden aangegeven met een tweede kwantumgetal met waarden $m_\ell = 1$, $m_\ell = 0$ en $m_\ell = -1$ en corresponderen met impulsmomenten ter grootte van $m_\ell \hbar$ om de gekozen as. In het algemeen zijn er $2\ell + 1$ banen mogelijk met m_ℓ -waarden die lopen van $m_\ell = +\ell$ tot en met $m_\ell = -\ell$ in stapjes van één. Voorbeelden voor $\ell = 0$ en $\ell = 1$ zijn gegeven in figuur 4.4.

Kwantisatie in waterstofatoom: banen en energieniveau's

Naast de kwantisatie van het impulsmoment, $mvr = n\hbar$ (vergelijking 4.2) hebben we om r , v en andere grootheden te vinden, de elektrische kracht tussen elektron en atoomkern nodig. Klassiek moet om het elektron in zijn baan te houden gelden

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

waar de constante ϵ_0 nodig is om de eenheid van lading (Coulomb) aan het MKS stelsel te relateren. Uit de kwantisatie van het impulsmoment, vinden we dan dat afstanden en energieën in het atoom gekwantiseerd zijn. Met wat rekenwerk vinden we

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} \equiv \frac{n^2}{Z} a_0 = \frac{n^2}{Z \alpha} \frac{\hbar}{mc}.$$

waar de Bohr straal $a_0 \approx 0,53 \times 10^{-10}$ m de karakteristieke afmeting van waterstof is. Om deze te vergelijken met de Compton golflengte van het elektron, wat in de laatste stap van bovenstaande vergelijking voor r_n gedaan is, gebruiken we de combinatie

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137},$$

Kwantisatie in waterstofatoom: banen en energieniveau's (vervolg)

een dimensieloos getal dat in essentie de sterkte van elektrische krachten geeft. Voor de energie, die gegeven wordt door de som van kinetische en potentiële energie, $E = \frac{1}{2}mv^2 - Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$, vinden we

$$E_n = \frac{Z^2}{n^2} \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \equiv \frac{Z^2}{n^2} E_R = \frac{1}{2} \frac{Z^2\alpha^2}{n^2} mc^2,$$

De voor het waterstofatoom karakteristieke energie, de Rydberg energie $E_R \approx 13,6$ eV is heel klein vergeleken met met de massa-energie van het elektron vanwege de factor α^2 . Dit rechtvaardigt de hierboven gekozen niet-relativistische aanpak (impuls is mv). Bij zware atomen (hoge Z) wordt de relativiteitstheorie wel van belang. Hoewel we voor het oplossen van het kwantummechanische probleem een beroep moeten doen op de Schrödinger vergelijking, verandert dat enkel de details. Het verandert niets aan de karakteristieke afmetingen en energieën. Om precies te zijn, het enige wat er verandert in de uitdrukking voor de energie, is dat het kwantumgetal n staat voor $n = n_r + \ell + 1$, waar n_r het aantal knopen in de golffunctie in radiële richting is en ℓ het (heeltallige) baanimpulsmoment is.

Het Pauli principe

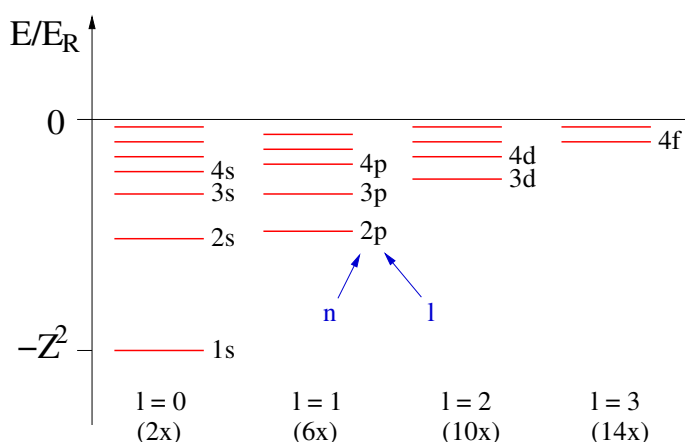
Het aantal beschikbare banen, elk met welbepaalde energie, is in figuur 4.5 weergegeven. Vergeleken met het waterstofatoom ($Z = 1$), waar alle waarden met dezelfde n -waarde dezelfde energie hebben (ontaard zijn) is deze ontaarding in een zwaarder atoom verdwenen, tengevolge van de afstotende effecten van elektronen onderling. Als het gaat om het aantal beschikbare posities per niveau is het belangrijk te realiseren dat elektronen ook een intrinsiek impulsmoment, spin genoemd, hebben. De grootte hiervan is $s = 1/2$ met $2s + 1 = 2$ mogelijke orientaties ($m_s = +1/2$ en $m_s = -1/2$), die we zouden kunnen karakteriseren als linksom of rechtsom draaiend.

In de laagste toestand van ieder atoom (grondtoestand) vullen de elektronen alle beschikbare niveau's van onder af op en wel zodanig dat alle plekken bezet zijn door precies één elektron. Zo is de elektronstructuur van koolstof (C) met $Z = 6$ gegeven door $(1s)^2 (2s)^2 (2p)^2$, en die van ijzer (Fe) met $Z = 26$ is $(1s)^2 (2s)^2 (2p)^6 (3s)^2 (3p)^6 (4s)^2 (3d)^6$. Atomen waarbij juist een hele schil gevuld is zijn het meest stabiel. De atomen waarbij de p-schil juist gevuld is danken er zelfs hun naam *edelgas* aan.

Aan deze opvulling, ligt naast het zoeken van de laagste energietoestand ook het Pauli principe ten grondslag. Dit zegt dat twee identieke elektronen niet in dezelfde toestand kunnen zitten. Het Pauli uitsluitingsprincipe noemden we al in hoofdstukken 1 en 3. Het geldt behalve voor elektronen, voor alle deeltjes met halftallige spin (fermionen). We zullen het bij de ontrafeling van de materie nog diverse keren tegenkomen.

Spectra

Elektronen kunnen switchen tussen beschikbare banen wanneer de daarvoor benodigde energie beschikbaar is, bijvoorbeeld door een foton te absorberen. Het geabsorbeerd worden van fotonen met bepaalde energie in het zonlicht is de oorzaak van de absorptielijnen in het zichtbare deel van het spectrum. Voor waterstof liggen een paar van die lijnen in



Figuur 4.5: De energie-niveau's in een atoom. De energieën worden vergeleken met de Rydberg energie. Het aantal beschikbare posities in een niveau met bepaalde n en l is $2 \times (2l + 1)$, waarbij de factor 2 van de spin van het elektron komt en de factor $(2l + 1)$ van het aantal m_l -toestanden. De spectroscopische benaming s, p, d, f staat voor $l = 0, 1, 2, 3$.

het zichtbare licht. Omgekeerd kunnen bij het terugvallen van de elektronen naar de originele baan of naar andere beschikbare banen weer fotonen worden uitgezonden waarbij de energie van het foton (en dus ook golflengte en frequentie) bepaald wordt door het energieverschil tussen de niveau's. Dat betekent ook dat absorptie- en emissiespectra heel kenmerkend zijn voor atomen (en moleculen).



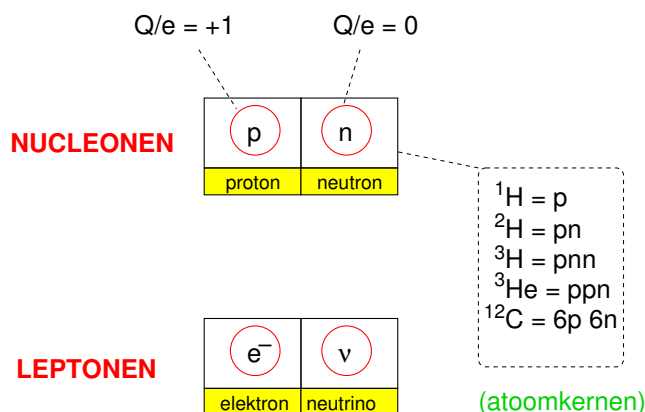
absorptiespectrum van waterstof



emissiespectrum van waterstof

Overigens zijn de lijnen niet oneindig scherp. De *natuurlijke lijnbreedte* wordt bepaald door de tijd die een elektron in een bepaald niveau doorbrengt (analoog aan het voorbeeld in figuur 2.9). Meestal echter zijn de lijnen verbreed of verschoven door andere effecten, in het bijzonder het Doppler effect, bijvoorbeeld verbreding ten gevolge van de willekeurige (thermische) beweging van de absorberende of emitterende atomen of ten gevolge van snelheidsvariëaties van de bron (denk aan roterende sterren), periodieke verschuiving vanwege beweging van bron of waarnemer (dubbelsterren, aardrotatie om Zon) of de roodverschuiving vanwege de uitdijing van het heelal.

Elektronen kunnen naast absorptie ook in banen met hogere energie terechtkomen door botsingen tussen de atomen onderling. Het aantal botsingen is afhankelijk van de snelheid (en dus kinetische energie) van de atomen en kan vergroot worden door stoffen te verhitten. Een belangrijke toepassing die met spectra samenhangt is de laser waarin een heel specifieke overgang wordt gestimuleerd. Dit werkt vanwege het feit dat fotonen precies de tegenovergestelde eigenschappen van elektronen hebben als het gaat om hoeveel fotonen er in een bepaalde toestand kunnen voorkomen. Hoe meer er al in een toestand zitten, des te liever er nog eentje bij komt. Dit gedrag is typerend voor alle deeltjes met heeltallige spin (bosonen).



Figuur 4.6: De bouwstenen van de atoomkern.

4.2 Atoomkernen

De atoomkern is weliswaar nietig in vergelijking tot het atoom, maar bevat wel praktisch alle massa. De atoomkern is zelf weer opgebouwd uit protonen en neutronen. De protonen hebben elk een positieve lading $+e$, de neutronen hebben geen lading. In een atoomkern zitten dus Z geladen protonen. Daarnaast bevat de atoomkern een aantal neutrale neutronen (N). In totaal bevat de atoomkern dan $A = Z + N$ nucleonen, de verzamelnaam voor protonen en neutronen. Proton en neutron zijn ongeveer even zwaar,

$$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938,3 \text{ MeV}/c^2,$$

$$m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 939,6 \text{ MeV}/c^2,$$

en ze worden daarom ook wel als de twee ladingstoestanden van één deeltje, het nucleon, beschouwd. Hun massa's zijn veel groter dan die van het elektron (voor het proton ongeveer 1836 keer zo groot),

$$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0,511 \text{ MeV}/c^2.$$

Met Z elektronen vormt de atoomkern een ladingsneutraal atoom (zie ook kader over atoomgewicht). Met proton, neutron en elektron hebben we in essentie de bouwstenen van de materie te pakken (zie figuur 4.6).

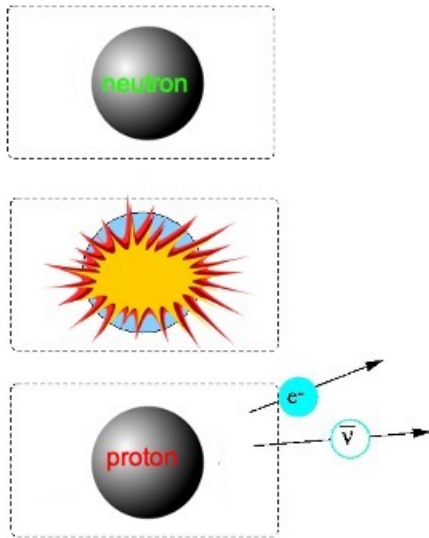
De naamgeving van de atoomkern is meestal dezelfde als die van het atoom. Afhankelijk van het aantal neutronen heeft men verschillende isotopen. Zo bestaan er drie isotopen van waterstof, ${}^1\text{H}$ (proton, atoomkern van gewoon waterstof), ${}^2\text{H}$ (deuteron bestaande uit een proton en een neutron, het atoom wordt deuterium of zwaar waterstof genoemd), of ${}^3\text{H}$ (triton bestaande uit een proton en twee neutronen, het atoom wordt tritium genoemd).

Atoommassa

Voor de massa van atomen wordt vaak als standaard de *atomic mass unit* (u) geïntroduceerd. Deze was gerelateerd aan 1/12 van de massa van het ${}^{12}\text{C}$ atoom, maar is tegenwoordig gewoon gedefinieerd als 1 g/Mol. Met het vastgekozen *getal van Avogadro*,

$$N_{\text{av}} \equiv (1 \text{ gr})/(1 \text{ u}) = 6,022\,140\,76 \times 10^{23},$$

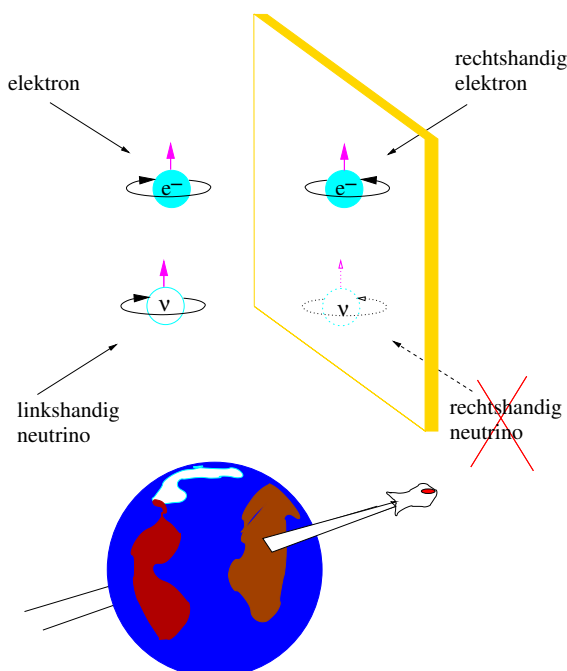
krijgen we dan $1 \text{ u} = 1,661 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$.



Figuur 4.7: Een cartoon voor het verval van een vrij neutron (niet gebonden in een atoomkern) in een proton, een elektron en een neutrino, $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$. Een dergelijke reactie kan verlopen als het energetisch mogelijk is, waar we dan wel de energie ten gevolge van massa ook in rekening moeten brengen. Een vrij neutron leeft maar zo'n 15 minuten, preciezer met halfwaardetijd $\tau_n = 877,8$ s. Na die tijd is de helft van het aantal neutronen uiteengevallen. Het verval in een atoomkern is ook mogelijk, bijvoorbeeld het beta verval van de triton atoomkern, ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}$. Dergelijke vervalprocessen zijn karakteristiek in de wereld van atoomkernen.

Niet al deze isotopen komen in gelijke hoeveelheden voor. Zo is deuterium al zeldzaam (0,015%) en valt de atoomkern van tritium met 1 proton en 2 neutronen spontaan uit elkaar via het zogenaamde beta verval, net als een vrij neutron (zie figuur 4.7), maar dan met een halveringstijd van 12,3 jaar. In het geval van Helium kennen we twee isotopen, ${}^3\text{He}$ en het veruit meest voorkomende ${}^4\text{He}$ (ook bekend als α -deeltje). De elementen Waterstof en Helium vormen het overgrote deel van de (zichtbare) materie in het heelal, als atomen ruwweg in de verhouding 12:1 of als massaverhouding 3:1.

Met het neutrino erbij lijkt figuur 4.6 compleet. We hebben de bestanddelen op het niveau van atoomkernen, ook al hebben de neutrino's nog lang niet al hun geheimen prijsgegeven. Dat laatste komt met name omdat de wisselwerking met de materie zo zwak is dat zelfs de enorme hoeveelheid neutrino's die de zon produceert meest dwars door de Aarde vliegen (illustratie 4.8).



Figuur 4.8: Neutrino's zijn ware spookdeeltjes die meest ongehinderd dwars door de Aarde vliegen. Hun eigenschappen zijn navent bizar. Zo zijn er enkel linkshandige neutrino's en niet zoals elektronen links- en rechtshandige. Ze breken de spiegelsymmetrie van de natuur, waar we later uitgebreid op terugkomen. Weliswaar zijn anti-deeltjes juist rechtshandig wat de symmetrie deels herstelt. Dat het neutrino een halftallige spin moet hebben volgt uit het verval in figuur 4.7. Om de som van impulsmomenten kloppend te krijgen met proton, neutron en elektron, allemaal met halftallige spins, moet er ongeacht hoeveel heeltallig baanimpulsmoment er is, nog een deeltje met halftallige spin geproduceerd zijn.

Kernkrachten

De afstotende elektrische krachten tussen twee protonen op een afstand van r correspondeert met een positieve potentiële energie ter grootte van

$$U_{\text{elektrisch}}(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\alpha \hbar c}{r}.$$

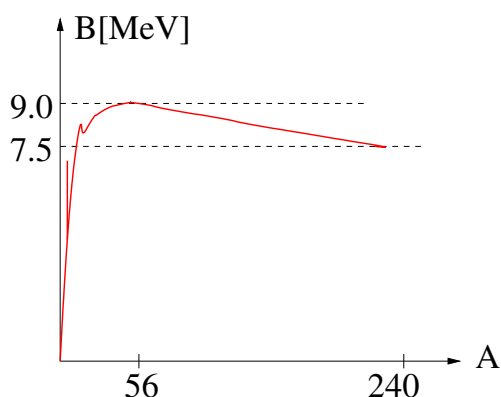
Met $\alpha \approx 1/137$ geeft dit voor $r = 0,2 \times 10^{-14} \text{ m} = 2 \text{ fm}$ als resultaat $U_{\text{elektrisch}} \approx 0,7 \text{ MeV}$. Echter twee nucleonen (ongeacht of het protonen of neutronen zijn) ondervinden daarnaast sterke krachten die behalve door een afstotende pit op korte afstand gekenmerkt worden door een aantrekkende potentiële energie

$$U_{\text{kern}}(r) = U_{\text{pit}} - \frac{g^2 \hbar c}{4\pi} \frac{\exp(-r/r_0)}{r}.$$

De *dracht* van deze kracht wordt bepaald door $r_0 \approx 1.4 \text{ fm}$, wat correspondeert met de Compton golflengte van een pion dat wordt uitgewisseld tussen nucleonen. Verder is er de *sterkte* gegeven door de koppelingsconstante g . Met $g^2/4\pi \approx 14$ geeft de aantrekkende term voor $r = 2 \text{ fm}$ een bijdrage tot U_{kern} van -340 MeV . Terwijl de elektrische potentiële energie op 10 fm met een factor 5 is afgenomen, is de potentiële energie van de kernkracht op een afstand van $r = 10 \text{ fm}$ veel sterker afgenomen tot $-0,2 \text{ MeV}$, een afname met meer dan een factor vijftienhonderd. Op afstanden groter dan 10 fm is er van de sterke kernkracht niks meer over. Maar uit de vergelijking van de waarden van $g^2/4\pi$ en α zien we toch dat de kernkracht in wezen veel sterker is dan de elektrische kracht. Op afstanden kleiner dan hun eigen afmetingen, ongeveer 0.8 fm , stoten twee nucleonen (ook nu ongeacht of het protonen of neutronen zijn) elkaar juist weer heel sterk af. Ze lijken op druppeltjes, die niet samen willen (we komen daar op terug). Het resultaat is een compromis met een gemiddelde potentiële energie van zo'n -50 MeV en een gemiddelde afstand tussen de nucleonen van de orde van grootte van r_0 . De straal van de hele atoomkern met A nucleonen is ongeveer $R = r_0 A^{1/3}$. Voor Uranium met $A = 238$ is wordt dat $R_U \approx 9 \text{ fm}$.

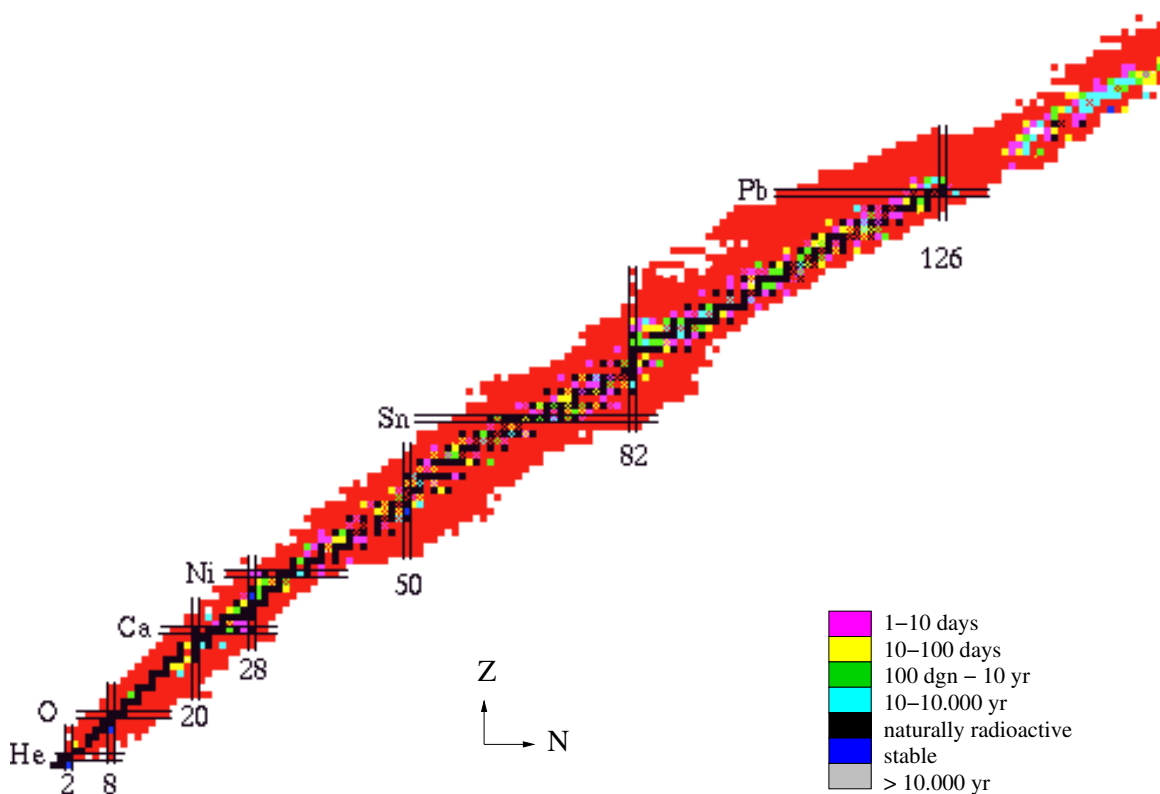
De sterke kernkracht

De karakteristieke bindingsenergieën voor atoomkernen en dus ook de energieën nodig om atoomkernen aan te slaan of er protonen of neutronen uit te schieten zijn in de orde van miljoenen elektronvolts (MeV's), zeer veel meer dan de eV's nodig om elektronen uit atomen te schieten (ioniseren). De krachten waarmee de nucleonen bijeen gehouden worden zijn dan ook van een heel ander type, de sterke kernkracht (zie kader). Toch volgen nucleonen netjes de regelmaat van de kwantummechanica. Ondanks de dichte pakking die het gevolg is van de sterke kracht tussen de nucleonen onderling bevinden ze zich in welgedefinieerde banen, daarbij als deeltjes met halftallige spin ook netjes het Pauli principe in acht nemend. Iedere baan heeft z'n eigen energie. De gemiddelde bindingsenergie van de nucleonen varieert tussen 0 en 9 MeV per nucleon (zie figuur 4.9). Deze bindingsenergieën van atoomkernen betekenen dat in processen waarin atoomkernen gevormd worden of waarin atoomkernen uiteenvallen, energieën nodig zijn of vrijkomen die in de orde van MeV's per nucleon zijn. Vergeleken met de nucleon massa is 1 MeV ongeveer 1 promille. Vandaar dat kernprocessen op macroscopische schaal, zoals in kernreactoren,



Figuur 4.9: Bindingsenergieën per nucleon voor atoomkernen als functie van het massagetal A . De piek bij lage A is die van ${}^4\text{He}$. De meeste stabiele atoomkern is ${}^{56}\text{Fe}$.

een gigantische hoeveelheid energie op kunnen leveren. Bijvoorbeeld als een $A = 200$ atoomkern uiteenvalt in twee $A = 100$ atoomkernen (kernsplijting), levert dat circa 1 MeV per nucleon op. Dat is zo'n 10^{14} J per kg materie. In Helium (${}^4\text{He}$) is de bindingsenergie ongeveer 7 MeV per nucleon, wat betekent dat kernfusie van Waterstof naar Helium zo ongeveer 7 MeV per nucleon levert. De meest stabiele atoomkern is die van ijzer (${}^{56}\text{Fe}$).



Figuur 4.10: Grafische weergave van stabiele atoomkernen in een Z tegen N grafiek, toont een 'eiland' van stabiele atoomkernen net onder de $Z = N$ diagonaal. Een interactieve 'nuclear chart' vindt men op <https://www.nndc.bnl.gov/nudat2>

Wanneer we grafisch de (stabiele) atoomkernen als Z tegen N uitzetten (figuur 4.10), zien we dat deze niet ver van de $Z = N$ diagonaal liggen. Dat is niet zo vreemd aangezien de sterke krachten voor protonen en neutronen vrijwel identiek zijn. Protonen en neutronen zijn net als elektronen deeltjes met een spin van een $1/2$, d.w.z. dat we bij het

opvullen van toegestane banen in de atoomkern rekening moeten houden met het Pauli principe. Als een schil vol is zal een volgend proton of neutron naar een hoger energieniveau moeten. Bij die getallen waarbij schillen juist vol zijn zien we de meest stabiele atoomkernen, zowel in horizontale richting (als een energieschil voor de neutronen gevuld is) als in verticale richting (bij een gevulde energieschil voor protonen). Deze zogenaamde *magische getallen* zijn in de figuur ook aangegeven. Het effect van de extra elektrische afstoting van de geladen protonen heeft tot gevolg dat het vullen van de proton schillen iets achterloopt, dus voor zware atoomkernen zal N groter zijn dan Z .

Verval van atoomkernen

We spraken al over de stabiliteit en het verval van atoomkernen. De drie belangrijkste vormen zijn alpha-verval, bèta-verval of gamma-verval. Bij het bèta-verval verandert in een atoomkern een neutron in een proton, $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ (β^- verval) of als dat energetisch voordeliger is een proton in een neutron, $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ (β^+ verval). In het laatste geval wordt er naast een neutrino een positron, het antideeltje van het elektron, geproduceerd. Antideeltjes komen straks in meer detail ter sprake. Aan deze vervalsprocessen waarbij elektronen en neutrino's vrijkomen ligt de zwakke kracht ten grondslag, waar we ook nog op terugkomen. Een tweede mogelijke vervalsreactie voor atoomkernen is het alpha-verval. Omdat het α -deeltje (${}^4\text{He}$) een erge stabiele atoomkern is (bindingsenergie van 7 MeV per nucleon) kan het energetisch voordelig uitpakken wanneer 2 protonen en 2 neutronen gezamenlijk de atoomkern verlaten. Om dat te kunnen bereiken, moeten ze de kernkracht overwinnen en ook nog eens een fikse barrière nemen die wordt opgeworpen doordat in de buitenste regionen van de atoomkern nucleonen de hoogste baanimpulsmomenten hebben. Maar juist de kwantummechanica maakt het mogelijk dat ze ondanks deze barrière naar de vrijheid kunnen tunnelen. Zo vervalt bijvoorbeeld Uranium-238 (dat is Uranium, dus in ieder geval 92 protonen, met 146 neutronen) in Thorium, ${}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{234}\text{Th} + \alpha$. De kans dat dit proces optreedt is uitermate klein. De halfwaardetijd van ${}^{238}\text{U}$ is $4,5 \times 10^9$ jr.

Gegeven een atoomkern is niet te voorspellen wanneer deze vervalt. De kans is 50 % dat het binnen 4,5 miljard jaar gebeurt, of als we maar genoeg atomen hebben dan zal na 4,5 miljard jaar de helft vervallen zijn. Gamma-verval treedt op als een nucleon op een of andere manier in een hogere baan terecht gekomen is. Bij het terugvallen wordt een foton uitgezonden. Voor een typisch energieverschil in de orde van de 0,1 MeV, correspondeert dit met golflengtes voor gamma-straling van zo'n 10^{-11} m, zeer veel kleiner dan de golflengtes van zichtbaar licht. Gamma-verval komt het meeste voor bij atoomkernen als vervolgproces van andere kernreacties, bijvoorbeeld kernsplijting of

Schatting van de leeftijd van de Aarde

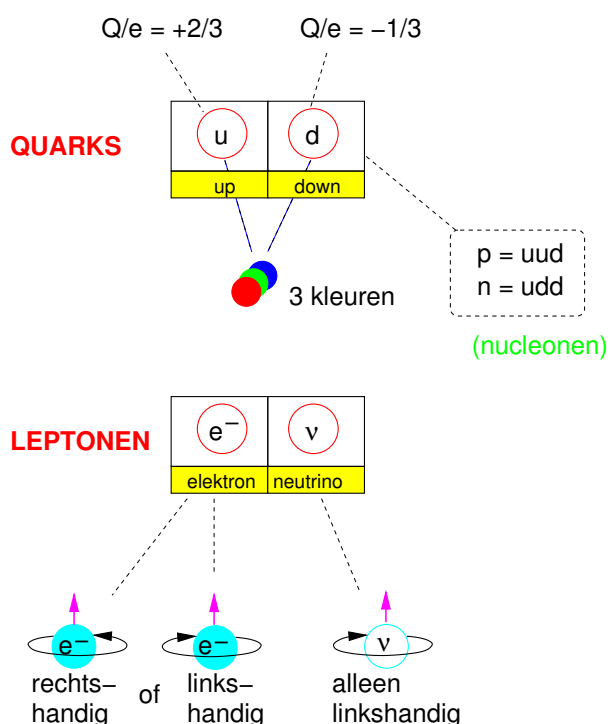
De zeldzame isotoop Uranium-235 (slechts 0,72 %) is veel actiever dan Uranium-238 en vervalt al (!) na 700 miljoen jaar. Als we aannemen dat bij de vorming van de Aarde er ongeveer evenveel van beide isotopen waren, dan zien we dat er ruim 8 halfwaardetijden van Uranium-235 nodig zijn om er voor te zorgen dat er een factor $2^8 = 256$ minder Uranium-235 is, terwijl in die tijd het Uranium-238 maar met net iets meer dan een factor 2 is afgenomen. Dus na 8 halfwaardetijden van Uranium-235 is er dan zo'n 2^7 , d.w.z. ruim 100 maal minder U-235. Dit geeft als schatting voor de leeftijd van de Aarde ruim 5 miljard jaar.

beschieting met andere deeltjes. De leeftijden zijn meestal vrij kort, fracties van seconden. Een van de bekendste gamma-stralers met diverse toepassingen voor conservering en voor medische behandeling is ^{60}Co , dat een relatief lange levensduur heeft van ca. 5 jaar.

4.3 Nucleonen

Gezien de dichte pakking van de atoomkernen is het verbazingwekkend hoe gering de invloed is van de substructuur van de nucleonen zelf. Het bestaan van een substructuur volgt uit het feit dat het proton met lading $+e$ een afmeting heeft van ongeveer 0,8 fm. Zowel proton als neutron hebben, net als het elektron, een spin ter grootte van $\frac{1}{2}\hbar$, met 2 mogelijke rotatietoestanden. Uit het feit dat niet alleen het geladen proton maar ook het ongeladen neutron zich als magneetjes gedragen volgt dat in het neutron blijkbaar ladingen rondlopen. Ook is het mogelijk om door beschieting van nucleonen met fotonen, elektronen of in botsingen van nucleonen onderling de deeltjes in een hogere energietoestand te brengen, van waaruit ze over het algemeen in ontzettend korte tijden weer vervallen.

Het bijzondere aan de structuur van de nucleonen in vergelijking met die van het atoom en de atoomkern is dat de deeltjes waaruit ze zijn opgebouwd er niet uit vrijgemaakt kunnen worden, voor zover we nu weten zelfs niet met oneindig hoge energieën. Dit fenomeen heet *permanente opsluiting*. Desondanks is uit het combineren van alle gegevens duidelijk geworden dat protonen en neutronen opgebouwd zijn uit quarks, die zelf ook een lading hebben, al zijn het nu fracties van de elementairlading e . Ook weten we dat ze spin ter grootte van $\frac{1}{2}\hbar$ hebben. Een proton is opgebouwd uit twee *up* (u) quarks en één *down* (d) quark, een neutron uit één u-quark en twee d-quarks. De u-quark heeft een lading $+\frac{2}{3}e$, de d-quark heeft een lading $-\frac{1}{3}e$. In het plaatje van ‘elementaire bouwstenen’ kunnen we de nucleonen vervangen door de quarks (figuur 4.11). De quarks en leptonen

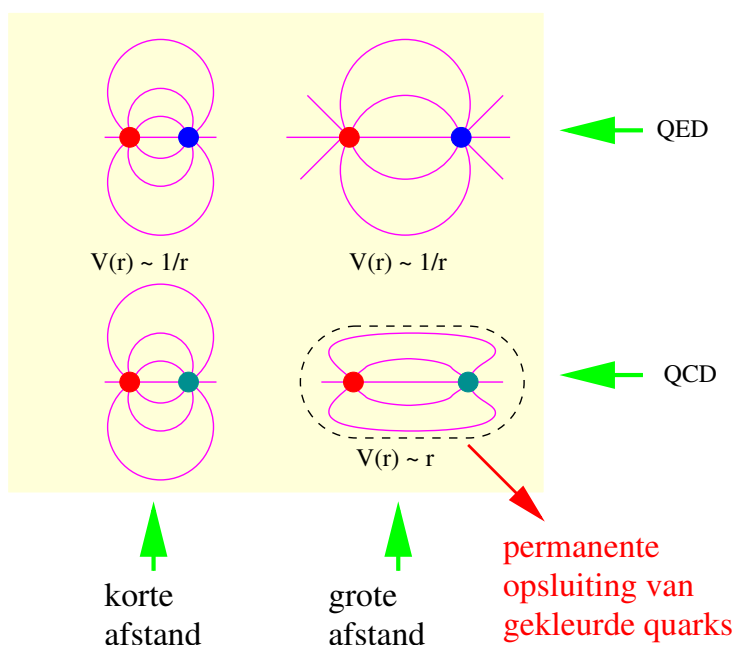


Figuur 4.11: De quarks en leptonen (van de eerste generatie); dit zijn de quarks waaruit protonen en neutronen opgebouwd zijn. De leptonen zijn degenen die we ook al tegenkwamen bij de opbouw van atoom en atoomkern.

zijn zover we nu weten de elementaire bouwstenen van de materie. De verzamelnaam van alle mogelijke deeltjes opgebouwd uit quarks of gluonen is *hadronen*, onderverdeeld in *baryonen* opgebouwd uit drie quarks (zoals de nucleonen) en *mesonen*. Mesonen, zoals we zullen zien, zijn opgebouwd uit een quark en een antiquark.

De elementaire eigenschappen van de deeltjes zijn hun spin, hun lading en hun identiteit als quark of lepton. Deze laatste vrijheid wordt *smaak* genoemd. In figuur 4.11 zien we de smaken *up* en *down* voor de quarks. Vanwege de gelijksoortige rollen die up en down quarks in andere dan elektromagnetische processen spelen, worden de eigenschappen ‘up’ en ‘down’ ook wel als twee toestanden van één quark gezien.

Naast bovenstaande kwantum getallen, hebben quarks één van drie mogelijke kleurladingen. Dit verklaart bijvoorbeeld het bestaan van het Δ^{++} deeltje, een baryon bestaande uit 3 (identieke) u-quarks, alledrie in de laagste baan. Ook de quark spins moeten in dezelfde richting wijzen omdat het deeltje een spin ter grootte van $3/2 \hbar$ heeft. De extra kleur-vrijheidsgraad voorkomt dan problemen met het Pauli principe, omdat elk van de quarks een verschillende kleurlading kan hebben.



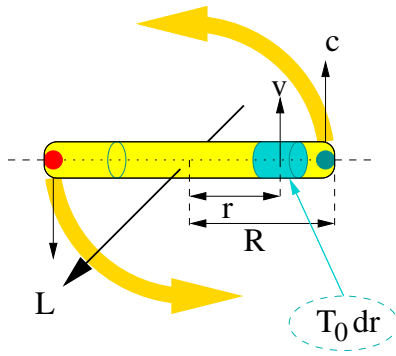
Figuur 4.12: Verschil in patroon van veldlijnen voor elektrische ladingen (Kwantumelektrodynamica, QED) en die tussen kleurladingen (Kwantumchromodynamica, QCD). Op kleine afstanden gedraagt de kracht tussen kleurladingen zich net als elektrische krachten, maar uiteindelijk wordt de kracht constant, vergelijkbaar met de elektrische kracht tussen twee condensatorplaten, in feite een een-dimensionale potentiaal. De constante kracht tussen de quarks is overigens wel gigantisch groot. De kracht (energie per lengte!) is ongeveer $0,9 \text{ GeV/fm}$ of omgerekend $1,5 \times 10^5 \text{ N}$ (dat is 15 Ton!).

Krachten tussen quarks

Maar kleur blijkt meer dan een gewone vrijheidsgraad. Het is net als elektrische lading de bron van een krachtveld. Zoals een elektrische lading de bron is van elektrische en (wanneer de lading beweegt) magnetische velden, die weer krachten induceren in andere ladingen, is de kleurlading de bron van kleur-elektrische en kleur-magnetische velden, die gevoeld worden door andere (gekleurde) quarks. Net zoals in de wereld van atomen, kristallen en moleculen de krachten allemaal tot elektromagnetische krachten kunnen worden

Hoe de spanning tussen quarks volgt uit de massa-impulsmoment relatie

Voor gebonden quark-antiquark toestanden blijkt het impulsmoment L evenredig met het kwadraat van de massa M , $L/\hbar = \alpha' M^2 c^4$ met $1/\alpha' = 1,1 \text{ GeV}^2$. Dit verband wijst op een roterende relativistische ‘string’. Om dat te laten zien gebruiken we dezelfde semi-klassieke aanpak als bij het waterstofatoom. Voor de snelheid van een relativistische string geldt $v/c = r/R$, zodat de bijna massaloze quarks aan de uiteinden ($r = R$) met de lichtsnelheid bewegen. De energie per lengte is precies de spanning T_0 , tenminste als de string stil zou staan. Voor de roterende string is de energie per lengte dan $T_0 \gamma = T_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, terwijl de bijdrage per lengte aan het impulsmoment $(T_0 \gamma / c^2) v r$ is. We vinden



$$\begin{aligned}
 E &= M c^2 = \int_{-R}^R dr \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
 &= T_0 R \int_{-1}^1 dx \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi T_0 R, \\
 L &= \int_{-R}^R dr \frac{T_0 v r}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
 &= \frac{T_0 R^2}{c} \int_{-1}^1 dx \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi T_0 R^2}{2 c}.
 \end{aligned}$$

Uit deze twee vergelijkingen kan R opgelost worden en volgt het verband tussen L en M^2 ,

$$\frac{L}{\hbar} = \frac{1}{2\pi \hbar c T_0} M^2 c^4,$$

dus $1/\alpha' = 2\pi \hbar c T_0$. Zo volgt uit het gemeten verband tussen impulsmoment en massa in het kwadraat van mesonen direct de stringspanning $T_0 = 0,9 \text{ GeV/fm}$. Overigens werkt het ook voor baryonen, met aan de uiteinden één en twee quarks respectievelijk.

herleid, kunnen de krachten in de wereld van nucleonen én atoomkernen herleid worden tot de kleurkrachten tussen quarks.

De velden tussen geladen deeltjes en de daarmee samenhangende krachten worden in een kwantum theorie beschreven via de uitwisseling van krachtdeeltjes. Het foton (lichtdeeltje) speelt die rol bij de elektromagnetische wisselwerkingen. Bij de kleurkrachten zijn er maar liefst acht verschillende *gluonen* die uitgewisseld kunnen worden. Het bijzondere is dat ze zelf ook een kleurlading hebben (het foton heeft géén elektrische lading!). Dit heeft tot gevolg dat de velden niet tot oneindig ver kunnen uitwaaiëren, maar als verbinding tussen de bronnen fungeren (zie figuur 4.12). Dit geeft aanleiding tot een potentiaal die zich op kleine afstanden als $1/r$ gedraagt en daarna lineair met de afstand toeneemt,

$$U_{\text{kleur}}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s \hbar c}{r} + T_0 r.$$

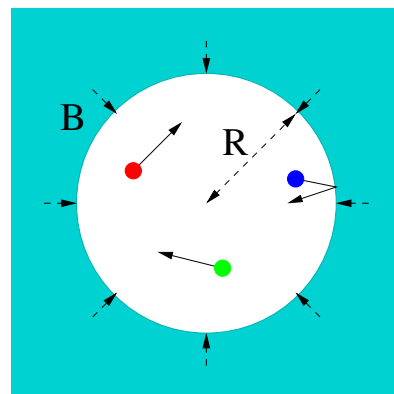
Op de waarde van $\alpha_s \sim 1$ komen we nog uitgebreid te spreken. De evenredigheidsconstante in het lineaire deel heeft de waarde $T_0 \approx 0,9 \text{ GeV/fm}$ en correspondeert precies met de constante kracht tussen de quarks op grote afstanden. Een lineaire potentiaal wijst zoals de naam al zegt op een één-dimensionale structuur, iets wat bij wisselwerkingen tussen quarks een leidend principe blijkt te zijn. Een constante kracht betekent

ook dat er een oneindige energie nodig is om de quarks uit elkaar te trekken. Dit leidt tot de onvermijdelijke opsluiting van de quarks in kleur-neutrale combinaties. Dat kan in een meson via een quark en een antiquark met complementaire kleurlading, maar ook met alleen maar quarks. Dan zijn wel alledrie de kleurladingen nodig om een neutrale combinatie te maken (dat is ook de reden van de keuze van de naam ‘kleurlading’). Omdat quarks en/of antiquarks zo sterk bij elkaar gehouden worden kunnen ze aangeslagen toestanden vormen met een hoog impulsmoment. In een kader is uitgelegd hoe uit het verband tussen de massa’s van die toestanden en het impulsmoment direct de sterkte van de kracht tussen kleurladingen gevonden wordt.

De massa van het proton en de massa’s van de quarks

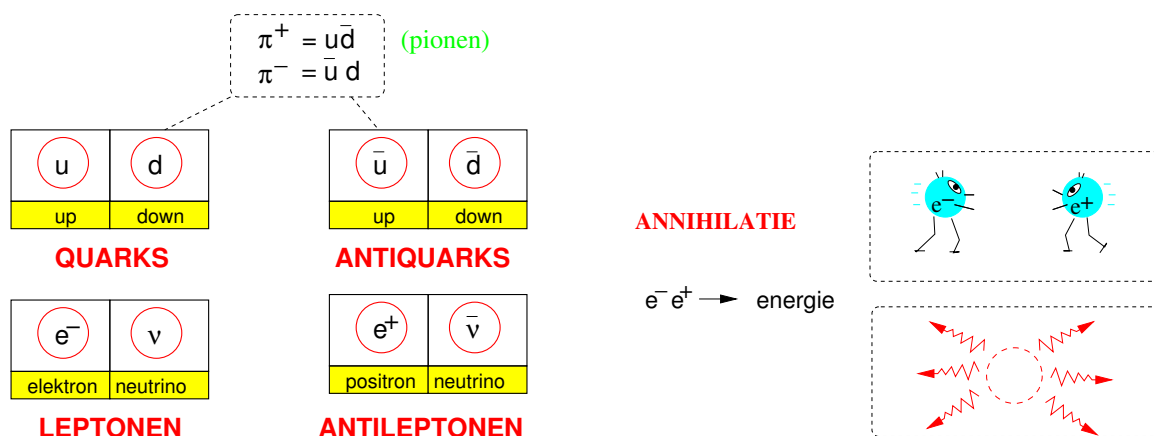
Opmerkelijk aan de quarks in een nucleon zijn ook de massa’s. De quarks zijn niet meer dan 5 - 10 maal zo zwaar als een elektron, maar het uiteindelijke resultaat van het systeem van drie gebonden quarks, een proton, is maar liefst bijna 2000 maal zo zwaar als een elektron. Het is een prachtige illustratie van het wezen van massa als de energie van een systeem in rust, terwijl er in het inwendige van alles gebeurt.

Een goed beeld geeft het model dat het proton als een druppel beschouwt met straal $R \approx 0,8$ fm, waarin de energiedichtheid hoger is dan de omgeving. Dat verschil, $B \approx 100$ MeV/fm³, correspondeert met een enorme druk op de druppel. De quarks met massa $m_q c^2 \approx 10$ MeV hebben een impuls bepaald door de uitgebreidheid van de golffunctie (kwantummechanica!), zo ongeveer de afmeting van de druppel. Dus $pc \sim \hbar c/R \approx 250$ MeV. Voor hun energie vinden we dan ook zo’n 250 MeV (vgl. 2.1). De energie van 3 quarks samen met de energie ten gevolge van de druk ($B \times \text{volume} = (4\pi/3) BR^3$) geven dan de energie van de totale druppel. En dat is dan de massa van het proton, $m_p c^2 \approx 938$ MeV.



De deeltjes en antideeltjes van de eerste generatie

Voor zover nu bekend zijn de quarks ondeelbaar. We weten dat hun afmetingen in ieder geval kleiner zijn dan 10^{-18} m (dat is 1/1000 van het proton). Ook de quarks in het proton bewegen (net als elektronen in het atoom en net als nucleonen in de atoomkern) in kwantummechanische banen, beschreven met een golffunctie. Voor de quarks is de energie in die banen veel groter dan de energiebijdrage ten gevolge van de massa. De quarks in nucleonen zijn dus ultra-relativistisch. Zoals we zullen zien heeft dit ook tot gevolg dat er voortdurend quark-antiquark paren verschijnen en weer verdwijnen. Met de corresponderende antideeltjes van de quarks en leptonen, waarvan het antideeltje van het elektron (het positron e^+) het langstbekende is, lijkt het er op dat we elementaire bouwstenen te pakken hebben (zie figuur 4.13). In ieder geval zijn er op dit moment geen aanwijzingen voor een ruimtelijke substructuur van de quarks en leptonen of hun antideeltjes.



Figuur 4.13: De quarks en leptonen (van de eerste generatie) en hun antideeltjes. Deeltjes en antideeltjes kunnen annihileren, bijvoorbeeld in botsingen van elektronen en positronen. De vrijkomende energie kan weer worden gebruikt om fotonen of andere deeltjes en antideeltjes te creëren.

4.4 Baryonen en Mesonen

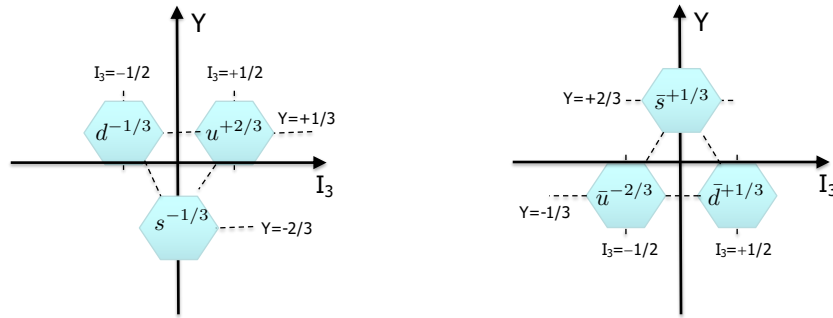
Baryonen en mesonen, met als verzamelnaam hadronen, zijn deeltjes die wisselwerken via de kleurkrachten oftewel sterke wisselwerking. Dit soort deeltjes zijn opgebouwd uit quarks en hun antideeltjes. Antideeltjes hebben vergeleken met corresponderende deeltjes tegengestelde ladingen, maar identieke massa's. Drie quarks met verschillende kleurladingen kunnen een kleur-neutrale combinatie vormen (*baryonen*) maar ook een quark en een antiquark kunnen een kleur-neutrale combinatie vormen (*mesonen*). Op die baryonen en mesonen willen we hier even wat dieper ingaan, omdat ze aan de wieg stonden van het standaardmodel van de elementaire deeltjes. Verder illustreert het de rol die symmetrie speelt in de fysische wereld. De aanwezigheid van drie kleuren en hun ononderscheidbaarheid in nucleonen, atoomkernen en atomen wordt beschreven door naar alle mogelijkheden te kijken waarin drie vrijheidsgraden in elkaar overgevoerd kunnen worden. Dit zijn unitaire transformaties die kwantumtoestanden in elkaar overvoeren, beschreven als SU(3) transformaties, een uitbreiding van de SU(2) transformaties voor spin toestanden zoals we die in hoofdstuk 3 hebben gezien. Voorbeelden van SU(3) transformaties zijn verwisselingen ($rgb \rightarrow grb$), cyclische verwisselingen ($rgb \rightarrow gbr$), maar ook het (kwantummechanisch) construeren van lineaire combinaties, zolang ze maar loodrecht op elkaar blijven. De kleur vrijheidsgraden worden dan gecombineerd tot een 'kleurloze' combinatie die ongevoelig is voor dit soort transformaties, namelijk de combinatie

$$|\text{kleurloos}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|rgb\rangle - |grb\rangle + |gbr\rangle - |bgr\rangle + |brg\rangle - |rbg\rangle).$$

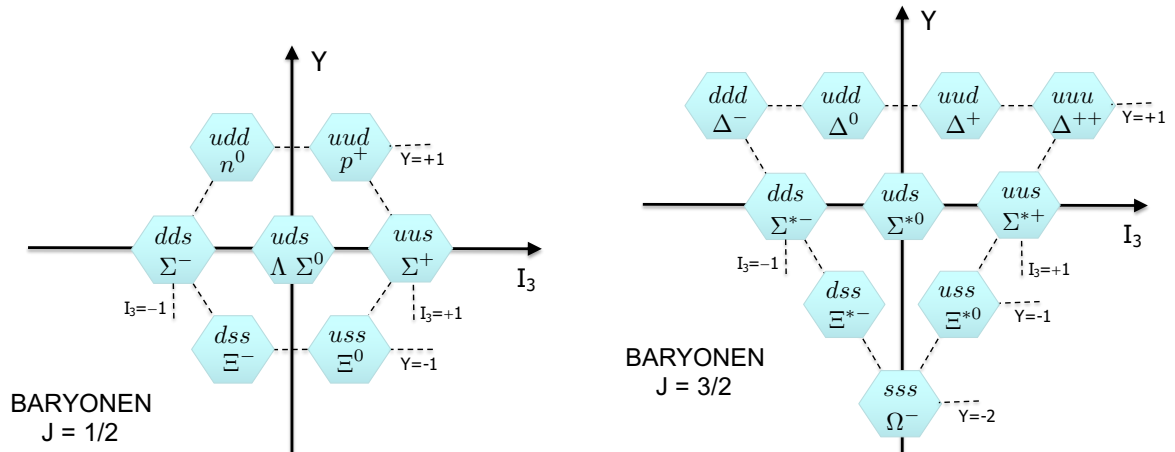
Niet alleen is deze combinatie ongevoelig voor transformaties die kleuren in elkaar overvoeren (kleur-neutraal!) maar de combinatie implementeert tevens de noodzakelijke antisymmetrie (minteken) bij verwisselingen van elk tweetal van de drie deeltjes, bijvoorbeeld deeltje 1 en 2. We refereerden al aan het feit dat dit het mogelijk maakt dat we drie up quarks met parallelle spins kunnen combineren tot een Δ^{++} deeltje.

Al spelen voor de structuur van protonen en neutronen alleen up en down quarks een rol, het toeval wil dat de proliferatie van deeltjes in de jaren na 1950 het gevolg was van

een derde quark quark, de ‘vreemde’ of ‘strange’ quark (s) genoemd. De proliferatie van deeltjes was het gevolg van de aanwezigheid van deze quark, weliswaar met een grotere massa dan de up en down quarks, maar ook weer licht genoeg om met de versnellers in die tijd geproduceerd te worden in paren van een s -quark en een $\bar{s}$ -antiquark. Die quark is weliswaar instabiel, maar ook weer stabiel genoeg om zo’n 10^{-10} s te leven (wat met de lichtsnelheid 3 cm betekent). Om de kleur van de quarks te neutraliseren zijn er drie quarks nodig. Met daarnaast nog eens drie soorten kunnen we dan groepen van deeltjes maken die in elkaar over te voeren zijn door transformaties $u \rightarrow d$, $d \rightarrow s$, etc. Deze vrijheidsgraden voor quarks worden *smaken* of *flavors* genoemd (u , d en s) en we hebben dan een 3-voudige flavor symmetrie $SU(3)_{\text{flavor}}$ naast de $SU(3)_{\text{color}}$. Om de mogelijke deeltjes te combineren beginnen we dan met de bases voor quarks en antiquarks,



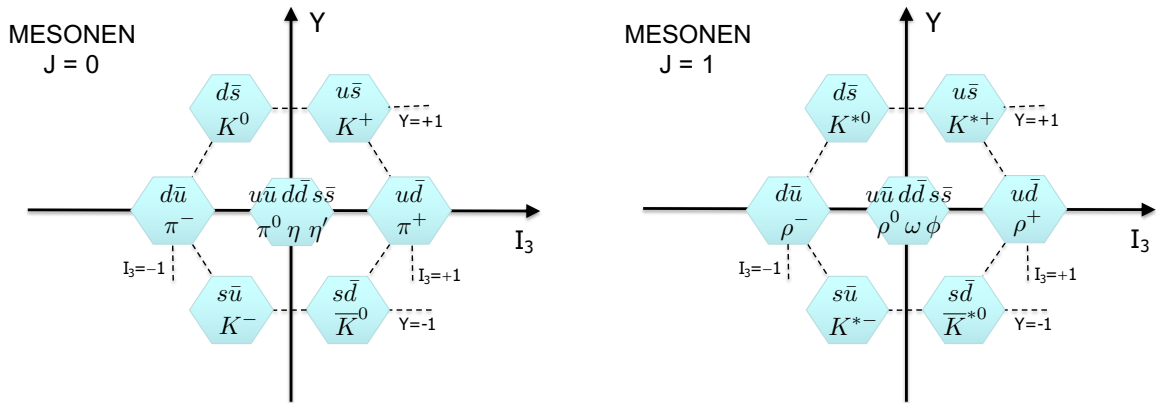
De kwantumgetallen *isospin* (I_3) en *hyperlading* (Y) zijn gekozen zodat ze voor de triplets tot nul middelen. Dat geldt ook voor de ladingen die voldoen aan de relatie $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$. Met een beetje puzzelen blijken we twee groepen van baryonen te kunnen construeren die passen in een groep van acht (octet) en een groep van 10 (decuplet),



Zoals we al beredeneerden geeft kleur de mogelijkheid om drie up quarks, elk met spin $\uparrow$ te combineren. Dit geeft de maximale spin toestand horend bij totale spin $J = 3/2$ van het Δ^{++} deeltje (rechtsboven in decuplet). Zo bestaat er ook een deeltje met drie down quarks, het Δ^- baryon ook met totale spin $J = 3/2$. Ook voor een combinatie van up en down quarks is een symmetrische spin toestand $J = 3/2$ mogelijk. Voor deze combinaties is ook $J = 1/2$ mogelijk, de spin 1/2 toestanden die we al gezien hebben als het proton p^+ en het neutron n^0 . Er bestaan ook baryonen met vreemde quarks, bijvoorbeeld het neutrale Λ -deeltje met als quark-inhoud uds of de Ξ^- en Ξ^0 -deeltjes met quark-inhoud dss

en uss respectievelijk. Het Ω^- -baryon bevat zelfs alleen maar vreemde quarks, sss . Dit bestaat alleen met totale spin $J = 3/2$. Deeltjes met vreemde quarks hebben een grotere massa, omdat de vreemde quark zwaarder is dan de up en down quarks. De massa van de vreemde quark is ongeveer $m_s \approx 150 \text{ MeV}/c^2$. Met name in het decuplet geeft dit een massapatroon in stappen van zo'n 150 MeV, op grond waarvan Murray Gell-Mann nauwkeurig het Ω^- deeltje kon voorspellen, een voorspelling die na een jaar werd bevestigd met de ontdekking van het deeltje.

Zoals al aangegeven kan een kleur-neutrale toestand ook gemaakt worden door een quark en antiquark te combineren. Dit geeft de meson nonetten (octet + singlet) met negen deeltjes,



met zowel de mogelijkheid van spin $J = 0$ en $J = 1$. De lichtste mesonen zijn de *pionen* met massa's rond $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$. Er zijn drie ladingsvarianten voor de pionen, π^+ , π^0 en π^- . De opbouw van de geladen pionen werd al geïllustreerd in figuur 4.13, maar is hier als onderdeel van alle mesonen gegeven. Het π^0 is een kwantummechanische lineaire combinatie van $u\bar{u}$ en $d\bar{d}$. In totaal zijn er drie neutrale mesonen mogelijk door smaken en corresponderende anti-smaken te combineren, π^0 , η en η' . Bovendien hebben we naast totale spin 0 ook spin 1. Hier zijn ρ^0 en ω opgebouwd uit $|u\bar{u}\rangle \pm |d\bar{d}\rangle$, terwijl $\phi = |s\bar{s}\rangle$. De leeftijd van het π^0 deeltje is veel korter dan die van de geladen pionen, omdat quark en antiquark van dezelfde smaak kunnen annihilieren. Het π^0 deeltje vervalt met halfwaardetijd $\tau = 8 \times 10^{-17} \text{ s}$ in 2 fotonen, $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, een typisch annihilatie proces. Er bestaan ook mesonen opgebouwd uit een *strange* (vreemde) quark met lading $-\frac{1}{3}e$ en een anti-up quark met lading $-\frac{2}{3}e$, het K^- -meson.

4.5 Generaties van deeltjes en antideeltjes

De bij botsingen in versnellers gecreëerde deeltjes en antideeltjes bevatten niet alleen deeltjes opgebouwd uit de lichtste quarks (up en down), maar ook deeltjes opgebouwd uit vreemde quarks, die we in de vorige paragraaf hebben beschreven. Vreemde deeltjes worden in paren gemaakt als de energie in de botsingen maar hoog genoeg is. Dat gebeurt via de sterke kracht en gaat gemakkelijk als de energie maar beschikbaar is. In het botsingsproces,

$$\pi^- + p \longrightarrow K^+ + \Sigma^-$$

is het onderliggende annihilatie en creatieproces $\bar{u} + u \rightarrow \bar{s} + s$. In het geval van de K^+ wordt de $\bar{s}$ gecombineerd met een u -quark, maar de mogelijkheid dat de $\bar{s}$ combineert met

een d -quark kan ook en leidt tot de eindtoestand $K^0 + \Sigma^0$ of $K^0 + \Lambda$. Al die eindtoestanden zijn mogelijk en bevestigden het quark model.

Op dezelfde manier zijn ook zwaardere quark smaken gevonden, met oplopende massa's. Naast de up, down en strange quarks, kennen we de *charm* quark ($Q = +\frac{2}{3}e$, $m_c \approx 1.5 \text{ GeV}/c^2$), de *bottom* quark ($Q = -\frac{1}{3}e$, $m_b \approx 5 \text{ GeV}/c^2$), en de *top* quark ($Q = +\frac{2}{3}e$, $m_t \approx 175 \text{ GeV}/c^2$). Qua massa is de top quark bijna net zo zwaar als de atoomkern van Au (goud). Zoals eenvoudige atomen zoals waterstof zeer geschikt zijn om uit het gemeten spectrum van aangeslagen toestanden de vorm van de aantrekkende potentiaal te bepalen (zie sectie 4.1) zijn de spectra van gebonden toestanden van $c\bar{c}$ (J/ψ -toestanden) en $b\bar{b}$ (Υ -toestanden) ideaal om de vorm van de kleurpotentiaal $U_{\text{kleur}}(r)$ (zie sectie 4.3 onder 'Krachten tussen quarks') te vinden. Behalve het Λ baryon met quark-inhoud uds bestaan er ook baryon toestanden met c en b -quarks. Hieruit is informatie te krijgen over de 'massa's' van de quarks. Daarnaast bestaan er ingewikkelder combinaties zoals tetraquarks, combinaties van $c\bar{c}$ en een licht quark-antiquark paar. Op details van deze zwakke vervalsprocessen, met name die gerelateerd aan links- of rechtshandigheid, komen we terug.

Ook in de leptonsector zijn er naast het elektron en neutrino, twee nieuwe generaties met weer ieder een negatief geladen lepton en een (bijbehorend) neutrino. Het muon (μ^-) en antideeltje (μ^+) hebben massa's van $106 \text{ MeV}/c^2$, het tau-lepton (τ^-) en antideeltje (τ^+) hebben massa's van $1777 \text{ MeV}/c^2$. Naast de geladen leptonen zijn er ook bijbehorende (linkshandige) neutrino's en (rechtshandige) anti-neutrino's. De neutrino's zijn veel lichter dan de lichtste quarks en leptonen, met massa's ver onder de eV/c^2 . Ze komen verderop nog uitgebreid aan bod.

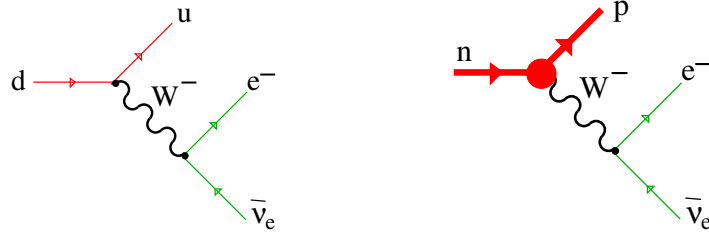
	QUARKS		LEPTONEN	
Familie 1	u up	d down	e^- elektron	ν_e neutrino
Familie 2	c charm	s strange	μ^- muon	ν_μ neutrino
Familie 3	t top	b bottom	τ^- tau	ν_τ neutrino
	+ ANTIQUARKS		+ ANTILEPTONEN	

+ KRACHTDEELTJES

g graviton	γ foton	W^+ Z^0 W^- W, Z bosonen	G 8 gluonen
elektromagnetisme		sterke kracht	
gravitatie		+ zwakke kracht	

Figuur 4.14: De drie generaties of families van deeltjes en de krachtdeltjes die uitgewisseld worden in de interacties tussen deeltjes.

De drie generaties van quarks en leptonen, hun antideeltjes en de krachtdeltjes (zie figuur 4.14) vormen de basis van het zogenaamde *standaardmodel*. Naast het foton en de



Figuur 4.15: De waarschijnlijkheid voor de overgang van een d -quark in een u -quark kan worden berekend met het Feynman-diagram in het linkerdeel van de figuur. Het is deze overgang die een neutron (udd) na gemiddeld 15 minuten in een proton (uud) transformeert onder uitzending van een elektron en een neutrino (zie figuur 4.7).

gluonen als de massaloze krachtdeeltjes van de elektromagnetische en kleur wisselwerkingen zijn er bij de krachtdeeltjes nog de zware W^{+} - en W^{-} -bosonen (circa $80 \text{ GeV}/c^2$) en het Z^0 -deeltje (ca $91 \text{ GeV}/c^2$). Deze deeltjes spelen een rol in de zwakke wisselwerkingen, o.a. verantwoordelijk voor bèta-verval van atoomkernen en het verval van het neutron. Dit verval op het niveau van nucleonen en quarks wordt beschreven met Feynman diagrammen waar we nog op terugkomen, maar die ook een mooie intuïtieve inkijk geven in het proces zoals in fig. 4.15. Op quark niveau verandert een d -quark in een u -quark onder uitzending van een W^{-} -deeltje dat op zijn beurt weer kan vervallen in een elektron en een neutrino (zie figuur 4.15),

$$d \longrightarrow u + W^{-} \longrightarrow u + e^{-} + \bar{\nu}_e.$$

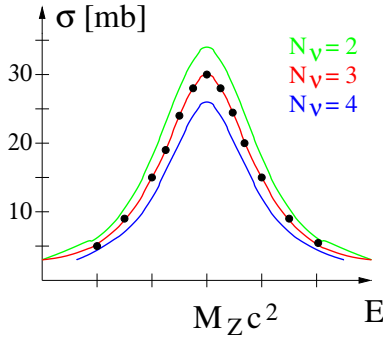
Op dezelfde manier vervallen in principe alle zwaardere quarks naar lichtere, bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow u + W^{-}, \\ b &\longrightarrow c + W^{-}, \\ t &\longrightarrow b + W^{+}. \end{aligned}$$

Bij de zwaarste quark, de top quark, is de tijd voor het verval zo kort, $\tau = 0,5 \times 10^{-24} \text{ s}$ ($\Gamma \approx 1,4 \text{ GeV}$ en $c\tau \approx 0,15 \text{ fm}$), dat er zelfs geen tijd is voor de formatie van een gebonden toestand van een top en anti-top quark, laat staan van een baryon met top quarks. Behalve naar leptonen, kunnen de $W^{\pm}$ -deeltjes ook weer vervallen naar quarks die daarna weer met quark-antiquark paren recombineren tot kleur-neutrale hadronen, bijvoorbeeld $W^{+} \longrightarrow u + \bar{s} \longrightarrow u + \bar{d}d + \bar{s} \longrightarrow (u\bar{d}) + (d\bar{s}) \longrightarrow \pi^{+} + K^{0}$.

Het aantal generaties

We hebben het over de drie generaties van deeltjes gehad en over de krachtdeeltjes. Een van die deeltjes is ook het Z^0 deeltje. Ook dat heeft te maken met de zwakke wisselwerkingen, maar omdat het neutraal is kan het niet zoals de W -deeltjes smaken veranderen. Voor neutrino's, die geen sterke en geen elektromagnetische krachten voelen, is het wel het enige relevante krachtdeeltje. Het wordt uitgewisseld als een neutrino botst met een proton, maar omdat het zo zwaar is ($m_Z c^2 = 91.2 \text{ GeV}$) werkt deze kracht slechts tot op afstanden ter grootte van de Compton golflengte van het Z -deeltje, $\lambda_Z = \hbar/m_Z c \approx 2 \times 10^{-18} \text{ m}$.



Figuur 4.16: De resonantiepiek van het Z^0 -deeltje in elektron-positron botsingen zoals die wordt berekend wanneer er wordt uitgegaan van vervalsmogelijkheid naar 2, 3 of 4 neutrino-antineutrino paren. Het geval $N_\nu = 3$ komt exact overeen met de waargenomen piek (zie ook figuur 2.9).

Het Z^0 deeltje leeft overigens niet zo lang zoals we al in hoofdstuk 2 (zie figuur 2.9) hebben gezien. Het is een brede, maar wel heel karakteristieke piek die gezien wordt in de botsing van elektronen en hun antideeltjes, veroorzaakt door de reactie

$$e^- + e^+ \longrightarrow Z^0.$$

Deze reactie wordt gevolgd door de verschillende vervalsmogelijkheden,

$$\begin{aligned} Z^0 &\longrightarrow q + \bar{q} && \text{(met } q = u, d, s, c \text{ en } b), \\ Z^0 &\longrightarrow e^- + e^+ && \text{(idem met } \mu \text{ en } \tau), \\ Z^0 &\longrightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e && \text{(idem met } \nu_\mu \text{ en } \nu_\tau). \end{aligned}$$

Merk op dat het verval naar de combinatie van top + anti-top quark niet mogelijk is omdat de gecombineerde massa van die eindtoestand veel groter is dan die van het Z^0 -deeltje. Dat is wel wat anders dan de gecombineerde massa's van de neutrino's die in essentie nul is vergeleken met die van het Z^0 -deeltje. Van al de vervalswijzen zijn die naar eindtoestanden met quarks en geladen leptonen ook gemakkelijk waar te nemen, waarbij de quarks niet rechtstreeks gezien worden, maar net als aangegeven bij het verval van een W^+ -deeltje recombineren tot mesonen of baryonen. De neutrino's worden in de detectoren van deeltjesversnellers echter niet gezien. Daar zijn iets grotere detectoren voor nodig zoals we in een volgend hoofdstuk zullen zien.

Het standaardmodel stelt ons overigens wel in staat de bijdrage van de neutrino's exact te berekenen. Die bijdrage opgeteld bij alles wat is waargenomen moet overeenkomen met de waargenomen piek. Dat klopt voor drie generaties van neutrino's (zie figuur 4.16). In een eventuele vierde generatie waarvan de quarks en leptonen te zwaar zijn om bij te dragen in het verval van het Z^0 -deeltje, moet dus ook het neutrino zwaar zijn (d.w.z. minstens de helft van het Z^0 -deeltje). Conclusie, de structuur van generaties zoals we die nu kennen met uitermate lichte neutrino's beperkt zich tot de 3 generaties in figuur 4.14.

Een overzicht van de deeltjes met drie generaties van materiedeeltjes (fermionen) en een aantal specifieke krachtdeeltjes (bosonen) en hun massa's is gegeven in figuur 4.17. Waarom er in het standaardmodel drie generaties zijn, waar de massa's vandaan komen en een verklaring voor de diversiteit van die massa's zijn nog open vragen. Misschien dat het Higgs deeltje met een massa van $M_{\text{Higgs}}c^2 = 125 \text{ GeV}$ hier nieuwe aanknopingspunten biedt. Het patroon van ladingen en aantallen krachtdeeltjes is iets wat voor experts onmiddellijk allerlei symmetrieën laat zien. Die gaan een belangrijke rol spelen in het verdere verhaal.

Hoofdstuk 5

De magie van drie

In hoofdstuk 2.1 is symmetrie als concept al geïntroduceerd, met continue symmetrieën zoals verschuivingen in de tijd of in een bepaalde richting en rotaties om een as met corresponderende behoudswetten voor energie, impuls en impulsmoment. Speciale Lorentz transformaties in ruimte en tijd zijn besproken in hoofdstuk 3, waarvoor we verder kortweg het Engelse woord ‘boost’ gebruiken. Deze transformatie beschrijft hoe grootheden gerelateerd zijn aan grootheden in rustsysteem, bijvoorbeeld bezien vanuit verschillende referentiesystemen, zoals een bewegende trein, raket of een deeltje. Deze continue symmetrieën, ook wel klassieke symmetrieën genoemd, worden gekenmerkt door een of meerdere parameters en transformaties zoals de afstand/tijd voor verschuivingen, de hoek voor rotaties of de snelheid voor boosts. Behouden grootheden corresponderen in de kwantumwereld met eigenwaarden van operatoren die de transformaties drijven en aanleiding geven tot pure fases, zoals $e^{-iEt/\hbar}$ in de tijd met energie E als eigenwaarde voor de Hamiltoniaan $-i\hbar \partial/\partial t$. De fysica zit ’m in de zoektocht naar de juiste Hamiltoniaan voor het systeem, liefst uitgedrukt in andere operatoren zoals impuls of impulsmoment.

Daarnaast is er een belangrijke categorie van discrete symmetrieën, te beginnen met tweevoudige symmetrieën bij transformaties als tijdsomkeer, spiegeling van ruimterichting of ladingsconjugatie die deeltje en antideeltje in elkaar overvoeren. Afhankelijk van een object of systeem, zijn er soms ook meervoudige discrete symmetrieën zoals rotaties over welbepaalde hoeken die ons terugbrengen bij een ononderscheidbare situatie zoals rotaties over 2π (360 graden), of over $2\pi/3$ (120 graden) voor een gelijkzijdige driehoek met drievoudige symmetrie of een rotatie over $\pi/3$ (60 graden) voor een C_6 ring van koolstofatomen. Verwant hieraan is een andere set van discrete symmetrieën voor een systeem met een eindig aantal (liefst identieke) onderdelen, zoals in het geval van elektronen in een atoom. Dat is permutatiesymmetrie. Permutaties zijn de mogelijke verwisselingen, 2 verwisselingen voor 2 deeltjes of objecten, $6 = 2 \times 3 = 3!$ verwisselingen voor 3 deeltjes, etc. Verwisselingen kunnen altijd gerealiseerd worden als een opeenvolging van paarverwisselingen. Bijvoorbeeld de permutatie (123), wat staat voor $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, is ook een opeenvolging, namelijk (12)(23). Afhankelijk van het aantal (even of oneven) paarverwisselingen kunnen we permutaties in even en oneven verdelen. In de kwantumwereld leidt een enkele paarverwisseling van identieke deeltjes tot dezelfde toestand, eventueel vermenigvuldigd met een fase, maar die kan alleen maar $+1$ of -1 zijn. Dit onderscheidt in de kwantumwereld *bosonen* en *fermionen*.

We gaan nu de symmetrieën van het standaard model op een rijtje zetten. Deels zijn dit dezelfde klassieke symmetrieën die we kennen uit de klassieke mechanica, maar er zijn

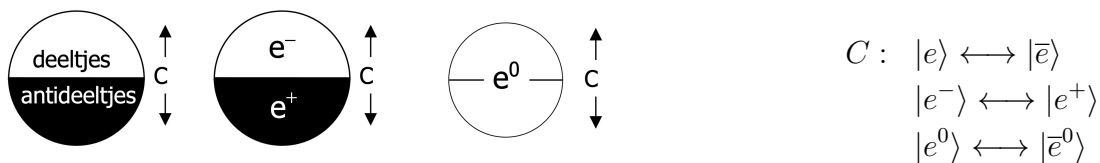
ook subtielere effecten. We verwezen in hoofdstuk 2.1 al naar hoofdstuk 4, waar juist het ontbreken van het ‘spiegelbeeld’ voor een neutrino (zie figuur 4.8) belangrijk is en duidt op de *breking* van de spiegelsymmetrie in het geval van de zwakke wisselwerkingen, ook wel *pariteitsschending van de zwakke wisselwerkingen* genoemd. Daarnaast is er een heel nieuwe categorie van iksymmetrieën waarin gespeeld wordt met de elektrozwakke en sterke ladingen van deeltjes en met 1-, 2- en 3-voudige symmetrieën.

5.1 De discrete CPT symmetrieën

In het SM spelen drie discrete spiegelsymmetrieën een cruciale rol, deeltje-antideeltje symmetrie, tijdsomkeer en (drie) ruimtespiegelingen. Tijdsomkeer en ruimtespiegelingen kennen we ook in de klassieke wereld, maar alledrie zijn ze enorm belangrijk in de kwantumwereld en dan wel in het bijzonder omdat de symmetrieën uiteindelijk toch gebroken zijn. Ongebroken symmetrieën zijn maar saai en in de kwantumwereld zelfs onzichtbaar!

Ladingsconjugatie (C): deeltje-antideeltje symmetrie

De meest cruciale symmetrie in de kwantummechanica en dan specifiek in de kwantumveldentheorie is naar mijn mening het bestaan van deeltjes en antideeltjes, waar de transformatie *ladingsconjugatie* heet. Het komt neer op complex conjugeren, iets wat in de complexe kwantumwereld direct consequenties heeft. Bijvoorbeeld, de fase $e^{-iEt/\hbar}$ voor een in de tijd evoluerende golffunctie verandert van teken, dus voor een gegeven (positieve) energie is het alsof de geconjugeerde golf terugloopt in de tijd, of op een meer symmetrische manier uitgedrukt, de fase draait andersom alsof de energie negatief is. ‘Okee, zo wat?’ is dan een terechte vraag. Het is alleen belangrijk voor superposities van toestanden met verschillende fasedraaiingen. In hoofdstuk 3.2 hebben we al gezien dat we in de kwantumwereld werken met superpositie, complexe getallen en met complexe inproducten van ket- en bra-toestanden. Het probleem van negatieve energieën wordt opgelost als er in de Hilbert ruimte naast deeltjes (ket toestanden $|\rangle$) ook antideeltjes (geconjugeerde toestanden $|\rangle^c$) bestaan met dezelfde massa/energie die zich gedragen als bra toestanden $\langle |$. Als er niets anders in de wereld zou zijn, is tijdsomkeer dan niets anders dan deeltje-antideeltje verwisseling, waarbij deeltje en antideeltje beiden positieve energie hebben, maar voor alle andere symmetrieën en ladingen die complexe fasedraaiingen geven, zijn de ladingen tegengesteld. Conjugatie vereist dan dat antideeltjes corresponderende antiladingen hebben, bijvoorbeeld voor negatief geladen elektronen bestaan anti-elektronen met tegengestelde positieve ladingen, positronen. Anders dan bij complexe getallen, waar we conjugatie met $z \rightarrow z^*$ aangeven, gebruiken we in de ruimte van toestanden geen $|\rangle^*$,



Figuur 5.1: *Ladingsconjugatie transformeert deeltjes in antideeltjes en vice-versa, waarbij ook de mogelijkheid van zelfgeconjugeerde toestanden mogelijk is, zoals aangegeven voor $e^0 = \bar{e}^0$ (een neutraal Majorana deeltje). Een voorbeeld hiervan is mogelijk het neutrino, maar hier komen we op terug bij de bespreking van chiraliteit in de volgende paragraaf.*

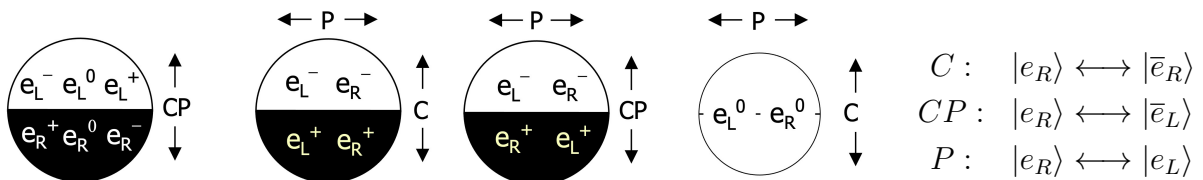
maar $|\rangle^c$ of een streep, bijvoorbeeld een elektron $|e\rangle$ en positron $|\bar{e}\rangle = |e\rangle^c$, of expliciet $|e^-\rangle^c = |e^+\rangle$, geïllustreerd in figuur 5.1. Het is ook prima als deeltje en antideeltje identiek aan elkaar zijn. Dat zijn (neutrale) zelfgeconjugeerde of ‘reële’ toestanden, voor fermionen Majorana deeltjes. Voorbeelden zijn fotonen en mogelijk ook neutrino’s, al vereist het wel dat zo’n deeltjes dan geen verdere relevante ladingen hebben.

Pariteit (P): ruimtespiegeling

Wanneer ruimtelijke dimensies (en beweging) een rol spelen, komt er naast C en T een symmetrie bij en wordt ook spiegeling en pariteit (P) belangrijk. Omdat de positie van $-\infty < x < \infty$ loopt, blijft het hele domein onveranderd als we links en rechts verwisselen, d.w.z. $x \longleftrightarrow -x$ toepassen. Een kwantumtoestand (voor een deeltje in rust) kan in zichzelf overgaan, al kan in dat geval wel het teken veranderen omdat we alleen weten dat twee spiegelingen terug bij af betekent. Dit teken $\pm$ correspondeert bijvoorbeeld met even en oneven golffuncties, respectievelijk. Voor lopende vlakke golven verandert onder pariteit de impuls $\mathbf{p}$ of het golfgetal $\mathbf{k}$. Langs een lijn gaat een toestand met positieve impuls $+p$ over in een toestand met negatieve impuls $-p$, terwijl in meer dimensies alle componenten van de impuls omkeren. Alleen de lengte van de impuls en de energie blijft hetzelfde. In de Hilbert ruimte is het resultaat bijvoorbeeld een verwisseling van naar links en rechts lopende vlakke golven. Een speciaal geval zijn lopende golven voor het geval dat $M = 0$. In dat geval hebben we langs één richting $pc = \pm E$ en splitsen de vlakke golven in een bepaalde richting in twee onafhankelijke, met lichtsnelheid bewegende, golven, rechts- en links-lopers (right- of left-movers in Engels), waarbij voor beiden de lengte van impuls/golfgetal gelijk gerelateerd is aan energie/frequentie, $|\mathbf{k}| = \omega/c$. Voor $M = 0$ zien we dat langs de bewegingsrichtingen $pc = \pm E$ zodat één van de lichtkegel coördinaten $x^\pm \sim ct \pm x$, alsmede één van de lichtkegel impuls componenten, $p^\pm \sim E \pm pc$, nul is. Dat laat zien dat we te maken hebben met een Hilbert ruimte met een tweedimensionale R-L structuur,

$$\begin{aligned} |\psi_R(x - ct)\rangle &= |R\rangle e^{-i\omega(t-x/c)} & \text{met } p^- \sim E - pc = 0, \\ |\psi_L(x + ct)\rangle &= |L\rangle e^{-i\omega(t+x/c)} & \text{met } p^+ \sim E + pc = 0. \end{aligned}$$

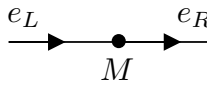
De toestanden $|L\rangle$ en $|R\rangle$ heten *chirale* basistoestanden en spiegeling is de transformatie die de chiraliteiten verwisselt, $|R\rangle \longleftrightarrow |L\rangle$. Omdat tijdsomkeer naast complex conjugeren



Figuur 5.2: Inclusief ruimtelijke dimensie hebben we naast ladingsconjugatie (C) ook spiegeling of pariteit (P). De combinatie CP als tegenhanger van tijdsomkeer (T) verdeelt kwantum toestanden in twee klassen, rechtshandige en linkshandige. Er is nog een keuze in deeltjes/antideeltjes. Voor geladen deeltjes is er ook een verdeling met een rol voor C en P afzonderlijk, geïllustreerd in tweede en derde diagram. Voor deeltjes toestanden geeft het streepje $\bar{e}$ aan dat het om het anti-deeltje van e gaat met tegengestelde ladingen of anderszins tegengestelde structuur. Voor neutrale deeltjes heeft pariteit alleen betekenis als ze zelfgeconjugeerde zijn, dus $\bar{e}_R^0 = e_R^0$ en $\bar{e}_L^0 = e_L^0$, de situatie in vierde diagram.

ook de chirale rechts- en links-lopers in elkaar overvoert, correspondeert voor chirale toestanden de gecombineerde transformatie CP op natuurlijke manier als compliment van tijdsomkeer, geïllustreerd in figuur 5.2 met steeds boven deeltjes en onder antideeltjes. In gevallen waar deeltje-antideeltje anderszins onderscheidbaar zijn, bijvoorbeeld als ladingen een rol spelen, is er meer flexibiliteit en is er een rol voor C en P afzonderlijk.

Alleen voor massaloze deeltjes zijn de chirale toestanden (R en L) fysische toestanden. In het SM zijn de meeste deeltjestoestanden juist lineaire combinaties, waarbij massa fungeert als de kenmerkende koppeling tussen de linkshandige en rechtshandige toestanden, geïllustreerd in diagram en vgl 5.1. Een fysische toestand heeft een impuls $-E < pc < E$ en we hebben zowel een deeltje als een antideeltje met massa $M \neq 0$ en snelheden kleiner dan lichtsnelheid c . Expliciet krijgen we voor fermionen na koppeling via massa



$$\begin{aligned} \text{deeltje:} \quad & |e; +p\rangle = c_R(p)|e_R\rangle + c_L(p)|e_L\rangle, \\ \text{antideeltje:} \quad & |\bar{e}; +p\rangle = c_L(p)|\bar{e}_L\rangle - c_R(p)|\bar{e}_R\rangle, \end{aligned} \quad (5.1)$$

met (reële) coëfficiënten geschreven als cosinus en sinus, afhankelijk van de snelheid,

$$c_R(p) = \sqrt{\frac{E+pc}{2E}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad c_L(p) = c_R(-p) = \sqrt{\frac{1-\beta}{2}} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

waar dan $\beta = v/c = \cos \theta$ (met $0 \leq \theta \leq \pi$). In de limiet van zelfgeconjugeerde L/R toestanden ($\bar{e}_R = e_L$ en $\bar{e}_L = e_R$) vormen de combinaties in vgl. 5.1 precies twee orthogonale toestanden. Het product $c_R c_L = M/2E$ laat de rol van massa zien, i.h.b. zien we dat voor $M = 0$ ($\theta \rightarrow 0$) maar ook voor $p \rightarrow \infty$ een van de coëfficiënten nul is of naar nul gaat. In dat geval zijn $|e_R\rangle = |e; +\infty\rangle$ en $|e_L\rangle = |\bar{e}; -\infty\rangle$ juist de rechts- en links-lopers. Bij fermionen hebben deeltjes en antideeltjes tegengesteld gedrag onder pariteit, wat bij keuze voor positieve pariteit van deeltje vastlegt welk van de twee combinaties in vgl. 5.1 het minteken heeft. Verder geldt voor $p = 0$ dat de coëfficiënten gelijk zijn aan $1/\sqrt{2}$. In dat geval kan de toestand gekarakteriseerd worden als een specifieke lineaire combinaties van links en rechts, de *scalaire* combinatie $|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle)$ of de *pseudoscalaire* combinatie $|P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle)$ met onder verwisseling even (+) of oneven (−) pariteit. Bosonen hebben over het algemeen een van deze pariteiten, waarbij oneven karakteristiek is voor een krachtdeeltje dat onderscheid ‘voelt’ tussen links en rechts. Voor neutrale fermionen, zoals neutrino’s is massa ook mogelijk, maar dit vereist minimaal dat CP = P, oftewel dat er geen onderscheid is tussen deeltje en antideeltje (*Majorana deeltjes*).

Tot op dit moment hebben we het overigens slechts over één ruimtelijke dimensie gehad, waar rotatie geen betekenis heeft. Chirale toestanden zijn rechts-lopers of links-lopers. Voor deeltjes met massa zijn de extremen, de chirale toestanden $pc = \pm E$ geen fysische toestanden die we in de wereld tegenkomen, terwijl voor massaloze deeltjes juist alleen de $pc = \pm E$ toestanden fysisch zijn. Met meerdere ruimtelijke richtingen krijgen we ook te maken met rotaties. Het verschil tussen links- en rechtslopende toestanden verdwijnt omdat die via een rotatie over 180 graden verbonden zijn. Maar er zijn nu rotatietoestanden met impulsmoment $s_z = \pm \frac{1}{2}\hbar$. Omdat rotaties rechtslopers met impulsmoment $+\frac{1}{2}\hbar$ en linkslopers met impulsmoment $-\frac{1}{2}\hbar$ (beide rechtshandige schroefbeweging) relateren, kunnen we in 3D juist de massaloze rechtshandige en linkshandige toestanden associëren met chiraliteit R en L , respectievelijk. Voor massieve fermionen krijgen we de

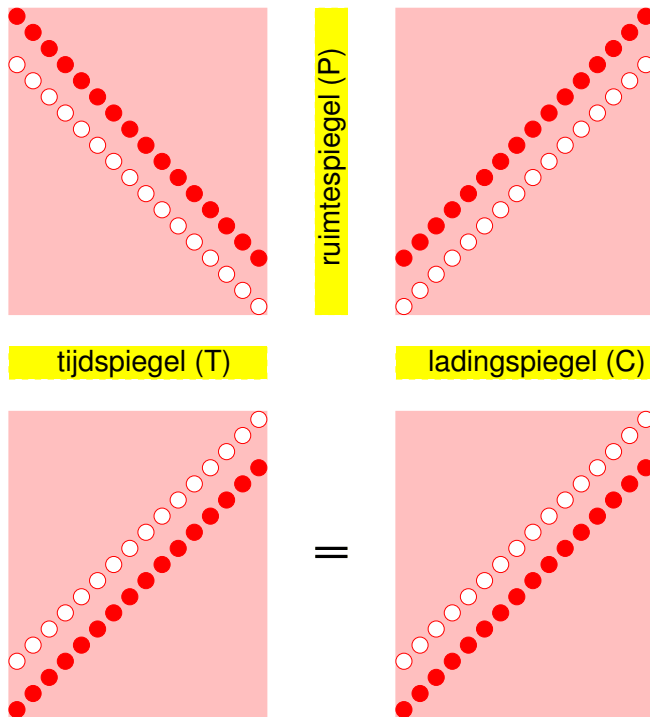
heliciteitstoestanden $|e_{\pm 1/2}; p\rangle$. Voor deeltjes en antideeltjes krijgen we

$$\begin{aligned} |e_{+1/2}; p\rangle &= c_R(p)|e_R\rangle + c_L(p)|e_L\rangle \xrightarrow{1D} |e; +p\rangle \xrightarrow{p \rightarrow \infty} |e_R\rangle, \\ |e_{-1/2}; p\rangle &= c_R(p)|e_L\rangle - c_L(p)|e_R\rangle \xrightarrow{1D} |\bar{e}; -p\rangle^c \xrightarrow{p \rightarrow \infty} |e_L\rangle, \\ |\bar{e}_{+1/2}; p\rangle &= c_R(p)|\bar{e}_R\rangle + c_L(p)|\bar{e}_L\rangle \xrightarrow{1D} |e; +p\rangle^c \xrightarrow{p \rightarrow \infty} |\bar{e}_R\rangle, \\ |\bar{e}_{-1/2}; p\rangle &= c_R(p)|\bar{e}_L\rangle - c_L(p)|\bar{e}_R\rangle \xrightarrow{1D} |\bar{e}; -p\rangle \xrightarrow{p \rightarrow \infty} |\bar{e}_L\rangle, \end{aligned} \quad (5.2)$$

met dezelfde coëfficiënten $c_{R/L}$ die we in In vgl. 5.1 zagen. In het geval van massaloze fermionen reduceren ze tot de chirale toestanden.

Tijdsomkeer (T)

Binnen het raamwerk van de kwantumveldentheorie is tijdsomkeer T de sluitpost, geïllustreerd in fig. 5.3 of op de omslag aan de hand van het gedrag van elektrontoestanden onder C, P en T. Omdat de energie altijd positief is, kan het zijn dat het toepassen van de gecombineerde transformatie CP ergens een complexe fase oplevert; dat wordt dan gecompenseerd door tijdsomkeer T , zodat onder het toepassen van CPT niets verandert. Dit zorgt ervoor dat energie altijd positief is, al betekende het wel de introductie van chiraliteit en antideeltjes, zoals besproken onder ladingsconjugatie en ruimtespiegeling hierboven. Schending van de CP en T symmetrie treedt op bij de kwantummechanische menging van minstens drie generaties van deeltjes, waarbij we de fasen niet meer in de toestanden kunnen absorberen. Dit komt in het volgende hoofdstuk ter sprake onder CP-schending.



Figuur 5.3: Als illustratie van het effect van CPT symmetrie kijken we naar banen van een gekleurd (rood) deeltje en wit antideeltje in een serie van tijdsopnames. Het spiegelbeeld van de serie linksboven is dan de serie rechtsboven, terwijl het effect van het omkeren van de tijd de serie linksonder zou opleveren. De plaatjes verkregen na ruimtespiegeling (rechtsboven) en tijdsomkeer (linksonder) zijn niet hetzelfde. Maar vervangen we in het plaatje rechtsboven ook nog eens deeltje en antideeltje (rood en wit) dan zien we dat de plaatjes linksonder en rechtsonder wel gelijk zijn. Dit illustreert de CPT symmetrie van de wereld. Voor elektronen met twee spin-orientaties is dit geïllustreerd op de omslag.

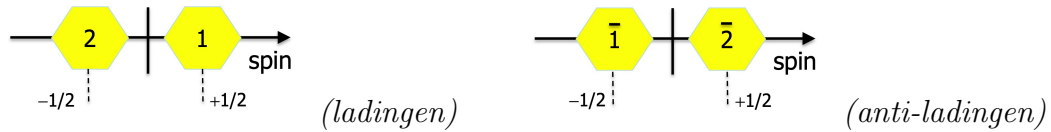
Generatoren van unitaire symmetrieën in 2 dimensies: SU(2)

Voor orthogonale rotaties in 2 dimensies is er slechts één generator. Dat zien we als we bij orthogonale symmetrieën ons beperken tot rotaties in het xy-vlak. Voor een 2-dimensionale complexe ruimte zijn er meerdere rotaties mogelijk omdat we ook het complexe vlak in kunnen. Laten we een overall fase achterwege, dan zijn er drie infinitesimale transformaties,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\alpha_3 & i\alpha_1 + \alpha_2 \\ i\alpha_1 - \alpha_2 & -i\alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{eenheidsmatrix}} + \frac{1}{2}\alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\text{complexe rotatie}} + \frac{1}{2}\alpha_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{reële rotatie}} + \frac{1}{2}\alpha_3 \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{\text{kwantumgetallen (spin/isospin)}}$$

met naast de eenheidsmatrix de drie Pauli matrices, σ_x , σ_y , σ_z als generatoren. Het bekendst zijn deze generatoren als spin operatoren voor spin 1/2 fermionen, $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$. Ook voor andere toepassingen, zoals isospin vormen de basistoestanden een doublet,



met kwantumgetallen gekozen als $\pm 1/2$ en tegengestelde kwantumgetallen/ladingen voor antideeltjes, hoewel doublet en anti-doublet in wezen niet van elkaar verschillen. Inclusief een gemeenschappelijke overall fase worden de transformaties aangeduid als U(2), maar omdat de overall fase een gemeenschappelijke U(1) fase is, heeft die U(2) groep de structuur $U(2) \cong U(1) \times SU(2)$.

ook afhangt van eigenschappen van de deeltjes. Bijvoorbeeld, in het SM correspondeert elektromagnetisme met een $U(1)_Q$ symmetrie,

$$|\text{toestand}\rangle \longrightarrow e^{i\alpha Q}|\text{toestand}\rangle.$$

In de infinitesimale expansie $e^{i\alpha Q} \approx 1 + i\alpha Q$ hebben we dan de lading Q als generator. De operator Q werkend op de toestand geeft simpelweg de lading van de toestand als (eigen)waarde. Voor $U(1)_Q$ blijkt deze waarde gekwantiseerd. De kleinste gemeten elektrische ladingen zijn veelvouden van $1,6 \times 10^{-19}$ C, de positieve lading van een proton. Dit laat onverlet dat we in een proton met andere kwanta, de quarks, met fracties van deze eenheidslading werken, maar nog steeds gekwantiseerd. Een elektron heeft een lading met exact dezelfde grootte als die van het proton, maar dan negatief, iets wat helemaal niet zo vanzelfsprekend is. Een positron, het anti-elektron, heeft juist weer een positieve lading, tegengesteld aan die van het elektron. Hier is het feit dat de grootte van de ladingen voor e^- en e^+ hetzelfde is eenvoudiger te begrijpen omdat het deeltje - antideeltje betreft. De kwantisatie van elektrische lading is een van de puzzels in het hele SM.

Het begrip generator wordt nog belangrijker voor meervoudige symmetrieën en complexe ruimtes zoals de Hilbert ruimte in de kwantumwereld. Een voorbeeld van tweevoudige SU(2) symmetrie hebben we in de Hilbert ruimte van een spin 1/2 deeltje met

een doublet basis van spin toestanden $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ of kortweg een doublet $(\uparrow, \downarrow)$ (zie kader over unitaire symmetrieën in 2 dimensies). De toestanden worden gekenmerkt door de spincomponent langs een bepaalde richting met maar twee mogelijkheden voor impulsmoment, namelijk $\pm\frac{1}{2}\hbar$, zoals we in hoofdstuk 3.2 hebben gezien. In het SM zullen we in de volgende sectie zien dat de gecombineerde elektromagnetische en zwakke wisselwerkingen een SU(2) symmetrie hebben.

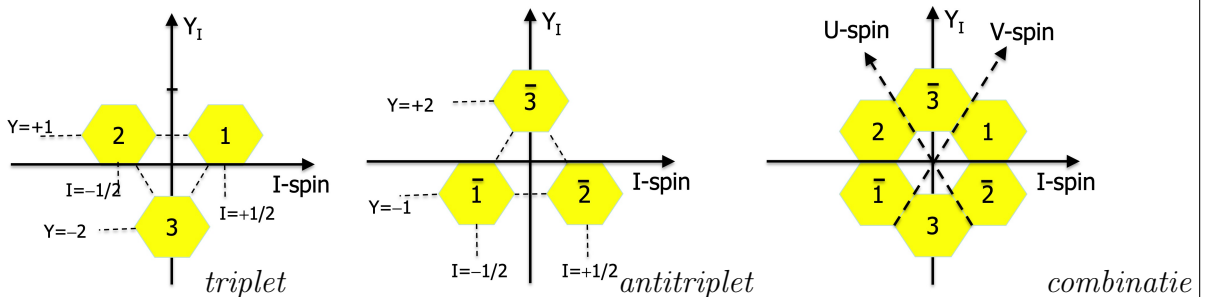
Een laatste belangrijke symmetrie in het SM is de drievoudige unitaire symmetrieën gebouwd rond tripletten en anti-tripletten van basistoestanden. We hebben deze al gebruikt voor de smaken van de lichte quarks (u, d, s), maar de symmetrie en de generatoren zijn in het SM met name van belang voor de kleuren van quarks. In het geval van SU(3) hebben we 8 generatoren zoals geïllustreerd wordt in het volgende SU(3) kader.

Generatoren van unitaire symmetrieën in 3 dimensies: SU(3)

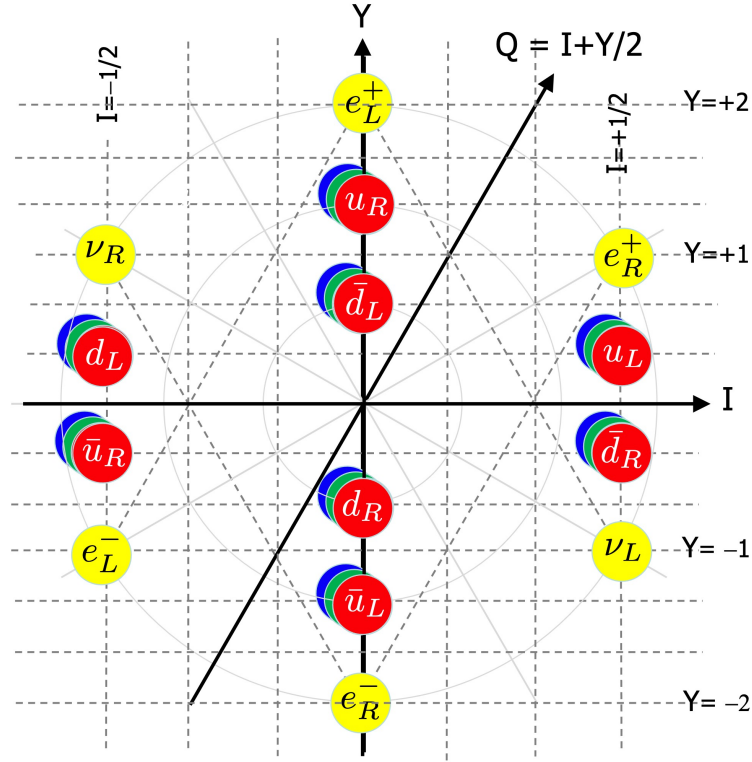
Voor een 3-dimensionale complexe ruimte zijn er acht rotaties mogelijk omdat we ook het complexe vlak in kunnen. De infinitesimale transformaties met als generatoren de Gell-Mann matrices λ_a ,

$$\begin{aligned} \sum_{a=1,\dots,8} i\alpha_a \lambda_a &= i \begin{pmatrix} \alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_8 & \alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_4 - i\alpha_5 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & -\alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_8 & \alpha_6 - i\alpha_7 \\ \alpha_4 + i\alpha_5 & \alpha_6 + i\alpha_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\alpha_8 \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} \alpha_I & \alpha_{12}^* & 0 \\ \alpha_{12} & -\alpha_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \alpha_V & 0 & \alpha_{45}^* \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{45} & 0 & -\alpha_V \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_U & \alpha_{67}^* \\ 0 & \alpha_{67} & -\alpha_U \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{I-spin} & \text{V-spin} & \text{U-spin} \end{matrix} \end{aligned}$$

Hierin zitten drie U(2) ondergroepen verstopt. Elk van deze kan gebruikt worden voor toekenning van kwantumgetallen, bijv. I-spin met $I = \lambda_I/2$ waar $\lambda_I = \lambda_3$ en hyperlading $Y_I = \lambda_8\sqrt{3}$. De I-spin komt in heeltallige of half-tallige waarden (singlet met $I = 0$, doublet met $I = \pm 1/2$), hyperlading Y_I karakteriseert de fase van doublet t.o.v. singlet,



Het is ook mogelijk kwantumgetallen te gebruiken via andere U(2) inbeddingen met discrete keuze tussen I-, U-, of V-spin, schematisch aangegeven in de combinatie in het rechter diagram hierboven, met $\lambda_V = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_8 + \frac{1}{2}\lambda_3 = I + \frac{1}{2}Y_I$ en $\lambda_U = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_8 - \frac{1}{2}\lambda_3$. In het root diagram zien we ook een belangrijk verschil tussen SU(2) doubletten en SU(3) tripletten, namelijk tripletten en anti-tripletten hebben tegengestelde kwantumgetallen en ze verschillen essentieel van elkaar (twee gespiegelde driehoeken). In het algemeen zijn er voor de SU(N) transformaties $N^2 - 1$ generatoren, waaronder $N - 1$ roots.



Figuur 5.4: Met de introductie van de kwantumgetallen hyperlading Y en (zwakke) isospin I voor de quarks, leptonen en hun antideeltjes verschijnt in iedere generatie eenzelfde intrigerend patroon voor de fermionen. Dat patroon bestaat uit singletten en doubletten in isospin met specifieke hyperladingen, technisch behorend bij een $SU(2) \times U(1)$ symmetrie. Elektrische lading zit in de elektrozwakke symmetrie als een combinatie, $Q = I + Y/2$. De elektrische ladingen zijn identiek langs lijnen loodrecht op de Q -richting, bijvoorbeeld u_R en u_L . De quarks hebben naast de elektrozwakke ladingen ook een kleurlading horend bij een unitaire $SU(3)$ symmetrie.

5.3 De multiplet structuur in het SM

Wat betreft de unitaire symmetrieën kent het SM twee exacte symmetrieën voor elektromagnetisme en voor de sterke wisselwerkingen en daarnaast gebroken symmetrieën voor de elektrozwakke wisselwerkingen. De enkelvoudige $U(1)_Q$ symmetrie voor geladen deeltjes is een exacte symmetrie. De generator Q vormt één as, de ladingsrichting, in het root diagram in fig. 5.4. De symmetrie voor de elektrozwakke krachten is wat minder evident en ook gebroken. Het is een $U_I(2) \cong SU(2)_I \times U(1)_{Y_I}$ symmetrie met voor het $SU(2)$ stuk als mogelijke isospin waarden I van $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \dots$. De hyperlading Y_I , loodrecht op I in het root diagram kan in principe allerlei waarden aannemen, maar in het SM zijn dat heel specifieke waarden gedicteerd door lading als de overall $U(1)_Q$ generator. We komen terug op die symmetriebreking. Voorbeelden van elektrozwakke doubletten in fig. 5.4 zijn

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_L^- \\ \nu_L^0 \end{pmatrix}}_{\text{lepton doublet}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} e_R^+ \\ \nu_R^0 \end{pmatrix}}_{\text{anti-lepton doublet}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} u_L^{+2/3} \\ d_L^{-1/3} \end{pmatrix}}_{\text{quark doublet}}.$$

Een heleboel andere toestanden zoals e_R^- en u_R vormen isospin singletten. Het cruciale van de $SU(2) \times U(1)$ symmetrie is dat het linkshandige neutrino ν_{eL} en het linkshandige elektron e_L als twee ‘ladingsvarianten’ van één deeltje worden beschouwd, terwijl het rechtshandige elektron e_R een deeltje is dat maar in één variant voorkomt. Het zou dus misschien logischer zijn om i.p.v. ν_{eL}^0 de notatie e_L^0 te gebruiken en in plaats van ν_{eR}^0 de notatie e_R^0 . Omdat uiteindelijk het neutrale lepton (neutrino) zich wat betreft de massa toch sterk onderscheidt van de geladen leptonen is deze benaming niet zo gebruikelijk.

Alle elektrozwakke multipletten voor leptonen bij elkaar

Als we alle linkshandige en rechtshandige multipletten bij elkaar nemen hebben we voor elk van de generaties drie linkshandige doubletten van leptonen en drie linkshandige singletten van anti-leptonen

$$\begin{array}{ccc} \boxed{e_L^+} & \boxed{\mu_L^+} & \boxed{\tau_L^+} \\ \boxed{e_L^-} \quad \boxed{e_L^0} & \boxed{\mu_L^-} \quad \boxed{\mu_L^0} & \boxed{\tau_L^-} \quad \boxed{\tau_L^0} \end{array}.$$

Weliswaar zijn deeltjes en antideeltjes door elkaar gehusseld. Het resultaat ziet er uit als een $SU(3)$ anti-triplet. Daarnaast hebben we drie rechtshandige doubletten van anti-leptonen en drie rechtshandige singletten van leptonen gecombineerd in rechtshandige tripletten,

$$\begin{array}{ccc} \boxed{e_R^0} \quad \boxed{e_R^+} & \boxed{\mu_R^0} \quad \boxed{\mu_R^+} & \boxed{\tau_R^0} \quad \boxed{\tau_R^+} \\ \boxed{e_R^-} & \boxed{\mu_R^-} & \boxed{\tau_R^-} \end{array},$$

waarbij we hier de notaties $\nu_{eL}^0 = e_L^0$ en $\nu_{eR}^0 = e_R^0$, etc. hebben gebruikt.

Wat kleur betreft zijn leptonen singletten, terwijl quarks gekarakteriseerd worden als deeltjes behorend bij een triplet of anti-triplet,

$$\text{quarks: } \begin{array}{cc} \boxed{q_g} & \boxed{q_r} \\ & \boxed{q_b} \end{array} \quad \text{anti-quarks: } \begin{array}{c} \boxed{\bar{q}_b} \\ \boxed{\bar{q}_r} \quad \boxed{q_{\bar{g}}} \end{array}$$

Deze $SU(3)_C$ symmetrie staat los van de elektrozwakke symmetrie en is een voorbeeld van een ongebroken drievoudige symmetrie. Dat impliceert ook dat de kleurlading niet direct detecteerbaar is. Het is te vergelijken met een bol met rotatiesymmetrie in de reële 3-dimensionale ruimte. Het is onmogelijk om op het oppervlak van de bol punten te identificeren als de symmetrie ongebroken is, d.w.z. in de afwezigheid van details op oppervlak of zonder speciale assen zoals een rotatieas. Voor kleur is het resultaat dat in de fysische wereld kleurladingen alsmede de met die ladingen samenhangende fases en krachtvelden geneutraliseerd zijn. Het enige wat overblijft zijn indirecte aanwijzingen voor drie kleuren, o.a. het al genoemde netto aantal quarks in een baryon. Ook zijn drie kleuren nodig om te begrijpen waarom het proces $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow c\bar{c}$ driemaal waarschijnlijker is dan naïef verwacht of waarom het proces $p\bar{p} \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$ juist driemaal minder waarschijnlijk is. In het eerste geval kan het charm quark-antiquark paar in drie kleurtoestanden geproduceerd worden, in het tweede geval moet het annihilerende quark-antiquark paar in proton-antiproton een passende kleur-antikleur combinatie zijn.

De kleuren van quarks zijn volledig onafhankelijk van elektrozwakke kwantumgetallen en ook van de chiraliteit. Maar voor quarks, net als bij leptonen, speelt chiraliteit in

de elektrozwakke sector juist een centrale rol. De elektrozwakke structuur voor quarks en antiquarks laat zich net als leptonen rangschikken in doubletten en singletten, De linkshandige quarks worden in doubletten gerangschikt, terwijl de rechtshandige quarks singletten vormen. Voor de anti-quarks hebben we juist rechtshandige doubletten en linkshandige singletten, In het volgende kader staat het volledige overzicht.

Alle elektrozwakke multipletten voor quarks bij elkaar

De linkshandige quarks worden in doubletten gerangschikt, terwijl de rechtshandige quarks singletten vormen.

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{u_R^{+2/3}} & \boxed{c_R^{+2/3}} & \boxed{t_R^{+2/3}} \\
 \boxed{d_L'^{-1/3}} \quad \boxed{u_L^{+2/3}} & \boxed{s_L'^{-1/3}} \quad \boxed{c_L^{+2/3}} & \boxed{b_L'^{-1/3}} \quad \boxed{t_L^{+2/3}} , \\
 \boxed{d_R^{-1/3}} & \boxed{s_R^{-1/3}} & \boxed{b_R^{-1/3}}
 \end{array}$$

waarbij we de lading even expliciet hebben aangegeven. Voor de anti-quarks hebben we juist rechtshandige doubletten en linkshandige singletten,

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\bar{d}_L^{+1/3}} & \boxed{\bar{s}_L^{+1/3}} & \boxed{\bar{b}_L^{+1/3}} \\
 \boxed{\bar{u}_R^{-2/3}} \quad \boxed{\bar{d}_R'^{+1/3}} & \boxed{\bar{c}_R^{-2/3}} \quad \boxed{\bar{s}_R'^{+1/3}} & \boxed{\bar{t}_R^{-2/3}} \quad \boxed{\bar{b}_R'^{+1/3}} . \\
 \boxed{\bar{u}_L^{-2/3}} & \boxed{\bar{c}_L^{-2/3}} & \boxed{\bar{t}_L^{-2/3}}
 \end{array}$$

Op de accentjes bij de linkshandige toestanden voor de d , s en b quarks komen we in paragraaf 6.4 nog uitgebreid terug.

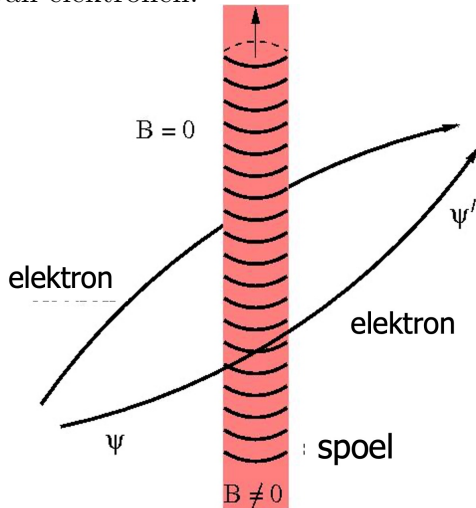
Bij de quarks doet zich een nieuw kwantumfenomeen voor, namelijk menging van quarks uit verschillende families. De linkshandige quark d_L' in het isospin doublet (d_L', u_L) is niet dezelfde toestand als de linkshandige quark d_L die met rechtshandige d_R samen gaat in een toestand met welbepaalde massa, energie en impuls. Het zijn die d -toestanden (zonder accent) die (u, d) isospin doubletten vormen zichtbaar in de structuur van hadronen. Kwantummechanisch is deze menging geen enkel probleem zolang de toestanden $\{d_L', s_L', b_L'\}$ maar netjes lineaire combinaties zijn van $\{d_L, s_L, b_L\}$, al komt het wel uit de lucht vallen. Meer hierover in het volgende hoofdstuk. Dat de elektrozwakke toestanden verschillen van de massa toestanden weten we via elektrozwakke vervalsprocessen. Via een W -deeltje verandert een linkshandige d' -quark in een u -quark, wat impliceert dat behalve de d -quark in het verval van een neutron ook een linkshandige vreemde s -quark kan vervallen naar een u -quark zoals in het verval van een Λ (uds -baryon), $\Lambda \rightarrow pe^-\bar{\nu}$. Dit als stap naar de volgende sectie, waar we de krachtdeeltjes en hun rol bespreken.

5.4 Krachtdeeltjes in het SM

Het vinden van symmetrieën die ten grondslag liggen aan deze multiplet structuur is de triomf van het standaardmodel van de elementaire deeltjes. Binnen multipletten onderscheiden we deeltjes met een of meerdere kenmerkende kwantumgetallen, bijvoorbeeld kleur voor quarks, of een op het eerste gezicht onverwachte combinatie van chirale toestanden

Aharonov-Bohm experiment

De kwantummechanische golffunctie van een elektron met welbepaalde impuls is een vlakke golf $\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})$ die net als lichtgolven interferentie kunnen geven als we twee paden realiseren, bijvoorbeeld door de elektronen door 2 spleten te laten gaan en daarna op een scherm achter die spleten te meten waar elektronen terechtkomen. Die waarschijnlijkheid voor het detecteren van elektronen vertoont dan eenzelfde interferentiepatroon als dat van licht door 2 spleten. Dat bevestigde het golfkarakter van elektronen.



In het Aharonov-Bohm experiment passeren de elektronen vis 2 paden niet alleen het scherm met de spleten maar ook een lange spoel. Alleen binnen de spoel is er een magnetisch veld $\mathbf{B}$ in de richting van de spoel, er buiten is $B = 0$. Voor een spoel met straal R is het $\mathbf{A}$ -veld een vectorveld dat ronddraait om de as van de spoel. Met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ als afstand tot de as,

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0 \right) \quad [r \leq R]$$

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{BR^2y}{2r^2}, \frac{BR^2x}{2r^2}, 0 \right) \quad [r \geq R]$$

Het faseverschil tussen de 2 paden hangt nu niet alleen af van het lengteverschil gemeten in golflengtes $\lambda = h/p$, maar er komt een extra elektromagnetische fase, de padintegraal $(e/\hbar)\mathcal{P} \int d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}$. Gebruikmakend van Stoke's theorema is het eenvoudig te zien dat dit faseverschil de door de 2 paden omsloten magnetische flux is ter grootte van $\alpha = \pi R^2 B$. Dit veroorzaakt een verschuiving van het interferentiepatroon bij het 2-spleten experiment. Het experiment is zo uitgevoerd dat de elektronen nooit binnen de spoel komen, bijvoorbeeld door de spoel in te bouwen in het scherm met de spleten.

in elektrozwakke doubletten en singletten. Deze symmetrieën hebben we in voorgaande sectie besproken. Behorend bij de symmetrieën hebben we ladingsoperatoren gezien en operatoren die toestanden in de multipletten in elkaar overvoeren. Dit zijn de generatoren van groepen van transformaties als $U(1)$ met 1 generator, $SU(2)$ met 3 generatoren of $SU(3)$ met 8 generatoren. De generator is ook een van de drijvers van de fasedraaiingen $e^{i\alpha Q}$. Naast de generator is er een intrinsieke sterkte van de draaiing die zelfs van de plaats en tijd kan afhangen,

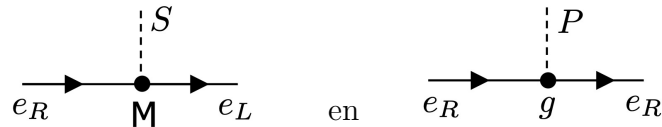
$$e^{i\alpha Q}|\text{toestand}\rangle \longrightarrow e^{i\alpha(x,t)Q}|\text{toestand}\rangle.$$

Voor een bewegend deeltje met lading e wordt de fase $e^{ie\alpha}$ die de toestand krijgt niet bepaald door elektrische of magnetische velden, maar door de lading en vectorpotentiaal $e\mathbf{A}(x, t)$ om precies te zijn door een extra fase $e\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ waar $d\mathbf{s}$ een stukje op de afgelegde weg is. De precieze uitdrukking voor de fase is de padintegraal $\alpha = (e/\hbar)\mathcal{P} \int d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(s)$. Het feit dat de vectorpotentiaal $\mathbf{A}$ en niet het magnetisch veld $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ relevant is, bleek uit het fameuze Aharonov-Bohm experiment [zie kader]. Dat experiment toonde aan dat de fase van de golflengte voor een bewegend deeltje in aanwezigheid van elektromagnetische velden naast de impuls en bijbehorende golflengte wordt bepaald door het vectorveld $\mathbf{A}$.

De elektromagnetische fase kan worden ingebouwd via minimale substitutie $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + e\mathbf{A}$. Dat werkt in een klassieke en een kwantumtheorie. De afhankelijkheid van ruimte en tijd van een $\mathbf{A}$ veld kan uiteengerafeld worden in vlakke golven, die acteren als de golf functies van krachtdeeltjes, zoals het foton. De richting van het $\mathbf{A}$ -veld dat loodrecht op de bewegingsrichting staat is de polarisatie-richting van het foton, twee mogelijke lineaire polarisaties (zeg ϵ_x en ϵ_y) of circulaire polarisaties (lineaire combinaties $\epsilon_{\pm} \sim \epsilon_x \pm i\epsilon_y$). Behalve de plaats- en tijdsafhankelijkheid beschreven met vlakke golven voor fotonen zien we de elementairlading e als een overall koppelingsconstante voor elektromagnetisme. Afhankelijk van de toestand hebben we (positieve of negatieve) veelvouden van e , voor quarks uitgebreid tot veelvouden van $\frac{1}{3}e$.

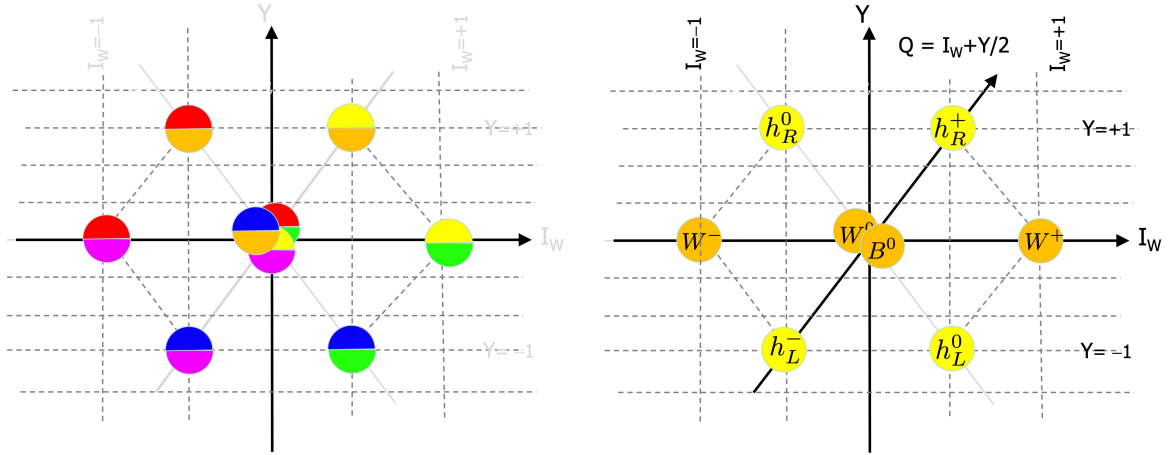
Voor de elektrozwakke krachten hebben we een tweevoudige unitaire $SU(2) \times U(1)$ symmetrie met drie vectorvelden $g_2 \mathbf{W}_i$ ($i = 1, 2, 3$) met één koppeling voor $SU(2)$ stuk en een vectorveld $g_1 \mathbf{B}$ met andere koppeling. Voor de sterke krachten wordt dat een drievoudige $SU(3)$ kleur-symmetrie met een eigen (sterke) koppelingsconstante g_s en acht vectorvelden $g_s \mathbf{G}_a$ ($a = 1, \dots, 8$). Er is nu voor iedere generator een $\mathbf{A}$ -veld en een krachtdeeltje. De krachtdeeltjes koppelen aan fermionen en hoe ze dat doen hangt af van de kwantumgetallen en de multipletstructuur van de fermionen. Voor de drie kleuren van quarks bepalen de Gell-Mann matrices λ_a werkende op een 3-component kleurvector wat er gebeurt voor dat betreffende gluon $\mathbf{G}_a$, bijvoorbeeld transitie van een kleur in een andere kleur¹. In kwantumveldentheorie worden ook in die gevallen de $\mathbf{A}_a$ -velden uiteengerafeld in vlakke golven, de golf functies, en de creatie- en annihilatieoperatoren van de krachtdeeltjes. Omdat ze aan twee fermionen koppelen zijn die krachtdeeltjes bosonen die ladingen van fermionen kunnen voelen of bij meervoudige symmetrieën ladingen in elkaar kunnen overvoeren.

De koppelingen van krachtdeeltjes aan fermionen vallen uiteen in scalaire S-koppelingen (RL symmetrisch) en pseudoscalaire P-koppelingen (RL-oneven, d.w.z. RR en LL koppelingen met tegengesteld teken).



Het cruciale van de symmetrieën in ijkveldentheorieën zijn de tijd- en plaats-afhankelijke transformaties en de hierboven genoemde expansie in vlakke golven. Dat zijn golf functies van krachtdeeltjes met welbepaalde energie en impuls die wordt overgedragen van fermionen naar boson en omgekeerd. De sterkte van de koppeling voor het scalaire boson is precies de massa M . Afhankelijk van de beschrijving kan er een relatie zijn, bijvoorbeeld $g = M/2$ in het geval van één ruimte-dimensie (1D). In dat geval zijn er maar 2 bosonen (S en P) en 2 fermionen (R en L), allemaal met dezelfde massa M . In een 3D wereld heeft het scalaire boson spin 0 (Higgs deeltje H) en hebben we voor de RR en LL koppelingen spin 1 deeltjes (vector bosonen V). Bovendien zijn er meer krachtdeeltjes samenhangend met generatoren van symmetrie, terwijl de krachtdeeltjes bij meervoudige symmetrieën ook elkaar voelen. Bijvoorbeeld, de acht gluonen hebben zelf ook kleur en de vier elektrozwakke krachtdeeltjes vormen zelf ook multipletten met isospin en hyperlading (zie figuur 5.5).

¹De kleuren van de gluonen vormen alle mogelijke (negen) kleur-antikleur combinaties, zoals het rood-antiblaauwe $G_{\bar{b}r}$, met uitzondering van één 'kleurloze' kwantumtoestand $r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}$. Een rode quark kan bijvoorbeeld in een blauwe overgaan onder uitzending van een gluon, $q_r \rightarrow q_b + G_{\bar{b}r}$.



Figuur 5.5: Krachtdeeltjes voor $SU(3)$ symmetrie vormen een octet van gekleurde gluonen. De krachtdeeltjes van de elektrozwakke $U(2)$ symmetrie vormen een triplet + singlet in isospin. In het $Y-I_W$ diagram kunnen we ook de Higgs velden kwijt zoals die in de theorie geïntroduceerd worden vóór spontane symmetriebreking, iets wat verderop wordt besproken.

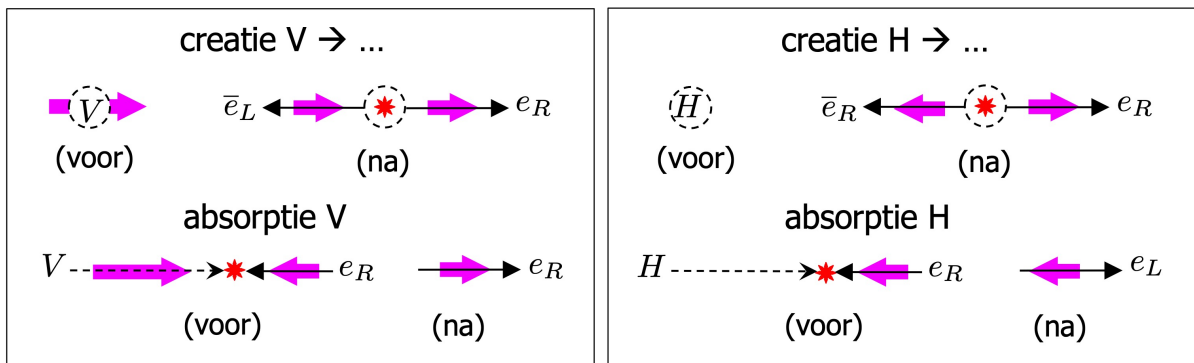
De simpele koppelingen van S en P (of V) bosonen zijn niet beperkt tot emissie en absorptie van krachtdeeltjes, maar de krachtdeeltjes kunnen ook optreden als deeltjes in begin- of eindtoestand. Dit is geïllustreerd in figuur 5.6. In essentie zijn de koppelingen van de krachtdeeltjes

$$e_{R/L} + H \longleftrightarrow e_{L/R} \quad \text{en} \quad e_{R/L} + V \longleftrightarrow e_{R/L} \quad (5.3)$$

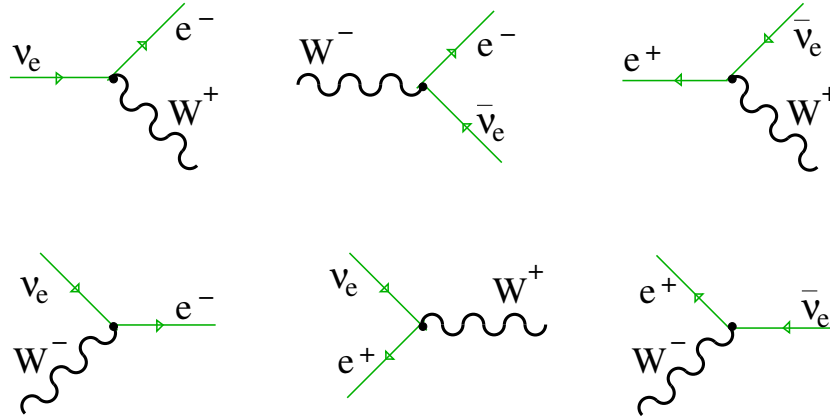
voor emissie en absorptie, en

$$H \longleftrightarrow e_R \bar{e}_R + e_L \bar{e}_L \quad \text{en} \quad V \longleftrightarrow e_R \bar{e}_L - e_L \bar{e}_R \quad (5.4)$$

voor deeltjes in begintoestand (creatie) of eindtoestand (annihilatie).



Figuur 5.6: Koppelingen van vector en Higgs bosonen aan chirale toestanden als krachtdeeltje in begintoestand en als intermediair bij wisselwerkingen. Naast de getoonde combinaties voor creatie en absorptie van R/L zijn ook de L/R verwisselde combinaties mogelijk alsmede analoge mogelijkheden voor annihilatie en emissie. De pijltjes geven hier bewegingsrichtingen weer. De vette paarse pijlen geven de heliceiteiten, spins parallel of antiparallel aan bewegingsrichting (korte pijlen spin $\frac{1}{2}\hbar$, langer pijlen $\hbar$). Deze illustreren het spin 0 versus spin 1 karakter van Higgs en vectordeeltjes.



Figuur 5.7: Illustratie van de rollen van krachtdeltjes in interacties en bij creatie of annihilatie van een deeltje-antideeltje paren voor geladen W -bosonen. De tijd in ieder diagram loopt van links naar rechts. De pijlen op de lijnen geven aan of we met een deeltje (pijl naar rechts) of antideeltje (pijl naar links) te maken hebben. Zo zien we o.a. de emissie van een W^+ -deeltje in $\nu_e \rightarrow e^- + W^+$, de absorptie van een W^- deeltje in $\nu_e + W^- \rightarrow e^-$, de creatie van een paar van deeltjes in $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ en de annihilatie in $\nu_e + e^+ \rightarrow W^+$.

Nog even terug naar de scalaire koppeling M . Die koppeling is enerzijds de karakteristieke grootte bij kwantummechanische menging van anderszins identieke L en R toestanden tot energie en impuls toestanden van fermionen. Behalve de menging kan ook hier energie en impuls veranderen door koppeling (emissie, absorptie of paar creatie/annihilatie, figuur 5.6) aan een uniek deeltje, het Higgs deeltje (H), nu met massa M als koppelingsconstante in de vertex. Dat fysische Higgs deeltje is in alle opzichten uniek en neutraal, heeft even pariteit (scalair S), spin 0 en geen enkele lading. Het is een combinatie van de twee neutrale Higgs velden h^0 en $\bar{h}^0$ in fig. 5.5.

De rol van de krachtdeltjes

Als concreet voorbeeld zijn in fig. 5.7 de geladen W bosonen gegeven, die koppelen aan doublet toestanden. Events zoals emissie of absorptie van W -bosonen corresponderen met een overgang binnen zo'n doublet. De specifieke doubletten waar het bij leptonen om gaat in het SM zijn het linkshandige (ν_L, e_L^-) deeltjes-doublet en het rechtshandige (e_R^+, ν_R) antideeltjes-doublet. De geladen $W^\pm$ -deeltjes voeren de deeltjes in elektrozwakke doubletten in elkaar over. Er zijn doubletten voor leptonen maar ook voor quarks. We hebben bijvoorbeeld $\mu_L^- \rightarrow \nu_{\mu L} + W^-$ en $d_L \rightarrow u_L + W^-$, maar ook $W^- \rightarrow e_L^- + \bar{\nu}_{eR}$. De combinatie van de eerste twee processen met het W -verval leidt tot reacties als het μ -verval, $\mu_L^- \rightarrow e_L^- + \bar{\nu}_{eR} + \nu_{\mu L}$ en de reactie $d_L \rightarrow u_L + e_L^- + \bar{\nu}_{eR}$ waar het W -deeltje niet als eindtoestand maar slechts als kortlevende tussentoestand optreedt. Het verval van de d -quark is het proces dat we al zagen in het vorige hoofdstuk bij het verval van het neutron (zie figuur 4.15). Bij het overbrengen van krachten gebeurt er bij deze events ook van alles in ruimte en tijd. Een event zoals absorptie of emissie van krachtdeltjes correspondeert met verandering in de beweging (impuls en impulsmoment) van deeltjes en antideeltjes. In de berekeningen van de waarschijnlijkheid voor fysische processen speelt dan ook niet alleen de koppelingsconstante horende bij de vertices een rol, maar ook de

Menging van krachtdeeltjes

Voor de zwakke wisselwerkingen worden de fases in termen van isospin en hyperlading en bijbehorende ijkvelden en koppelingen gegeven door

$$\sum_{a=1,2,3} g_2 \mathbf{W}^i I_W^i + g_1 \mathbf{B} Y_W \xrightarrow{\text{SU}(3)} \sum_{a=1,2,3,8} g \mathbf{W}^a \frac{\lambda_a}{2},$$

waar λ_a de eerder genoemde Gell-Mann matrices zijn (zie ook kader in sectie 5.2). De krachtdeeltjes die bij ladingen I_3 en Y horen zijn de ijkbosonen W^0 en B^0 . De fysisch waargenomen toestanden zijn mengtoestanden Z^0 en γ , genoteerd als

$$\begin{pmatrix} Z \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ B \end{pmatrix}$$

met de zwakke menghoek (Weinberg hoek) θ_W waarvoor algemeen geldt $e = g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W$. Experimenteel is $\theta_W \approx 29$ graden. Opmerkelijk is dat dat SU(3) symmetrie voor $\mathbf{I}$ en Y zou betekenen dat $I_3 = \lambda_3/2$ en $Y = \lambda_8/\sqrt{3}$ waaruit volgt dat $g_1/g_2 \approx 1/\sqrt{3}$ of $\theta_W = 30$ graden. Het is een aanwijzing dat het in elkaar vlechten van 1-, 2- en 3-voudige symmetrie in het SM zo gek nog niet is.

amplitudes $c_R(p)$ en $c_L(p)$ voor rechts- en linkshandige componenten in massieve deeltjes alsmede factoren gerelateerd aan spintoestanden. Dit is allemaal onderdeel van de compacte en intuïtief aantrekkelijke beschrijving van de wisselwerkingen binnen het raamwerk van kwantumveldentheorieën. In combinatie met symmetrieën zijn dat specifiek de ijktheorieën, waarbij de complexe fasestructuur voor deeltjes van punt tot punt in ruimte-tijd kan variëren, alles netjes gereguleerd door kwantumvelden horend bij krachtdeeltjes.

Menging van krachtdeeltjes

De sterkte van de koppeling aan krachtdeeltjes wordt gegeven door de koppelingsconstante. Het ‘sterke’ van de sterke wisselwerkingen zit hem in de grootte van g_s vergeleken met de sterkte van de elektrozwakke wisselwerkingen. Rekening houdende met de eenheden gaat het bij de elektrozwakke wisselwerkingen met $g_1 \sim g_2 \sim e$ met $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c \approx 1/137$, terwijl bij de sterke wisselwerkingen $\alpha_s = g_s^2/4\pi \hbar c \sim 1$.

Met SU(2) $\times$ U(1) als elektrozwakke symmetrie zijn er in principe 2 koppelingen g_2 en g_1 voor SU(2) en U(1) krachtdeeltjes, respectievelijk en kunnen de neutrale krachtdeeltjes W^0 en B^0 kwantummechanisch mengen. Dat gebeurt ook met als fysische toestanden Z^0 en γ (zie kader over menging van krachtdeeltjes), waarbij het foton een massaloze combinatie vormt. Massaloze krachtdeeltjes (fotonen en gluonen) zijn indicatief voor ongebroken symmetrieën. Inderdaad vormen de $W^\pm$ en Z^0 zware krachtdeeltjes met massa’s van de orde van grootte van het Higgs deeltje.

5.5 Kwantum verstrengeling in het SM

Symmetrie correspondeert met zich herhalende patronen, denk bijvoorbeeld aan een kristalrooster. Het simpelste geval van één bit met toestanden ‘off/on’ of 0/1 heeft symmetrie die duidelijker naar voren komt in representaties als R/L of $+/-$, wat het identieke bena-

drukt en de tweevoudige discrete Z_2 symmetrie expliciet maakt zoals besproken in eerste sectie van dit hoofdstuk. Tijd verschijnt als een parameter in de fase $e^{-i\omega t}$ met frequentie gerelateerd aan energie $E = \hbar\omega$ als een fasevrijheid van de toestand. Discrete symmetrieën C, P, en T onderscheiden fermionen en anti-fermionen, waar lineaire combinaties van chirale R/L toestanden toestanden met specifieke energie en impuls vormen en waar parameters tijd en ruimte verschijnen in de fases van vlakke golven. Massa en eigentijd karakteriseren de toestanden van massieve fermionen en Lorentz transformaties, in het bijzonder de boosts met snelheid als parameter, relateren de toestanden, in 1 ruimtelijke dimensie (1D). We hebben ook boson toestanden, in het simpelste geval een scalaire toestand met even pariteit (S) koppeland aan R-L toestanden en een pseudoscalair deeltje met oneven pariteit (P) koppeland aan de R-R en L-L toestanden. Deze deeltjes zijn de voorlopers van Higgs en krachtdeeltjes zoals foton. De koppelingen of overgangen tussen fermion toestanden worden beschreven met vertices. Dit is een 1D supersymmetrische theorie² waar sterkte van massa en lading samenhangen. Lading is het aangrijpingspunt voor het foton en zorgt in 1D voor een lineaire potentiaal waarin fermionen opgesloten zijn.

Het 1D theoretisch raamwerk bevat de essentie van het SM. Het heeft een Higgs sector waarbij het scalaire Higgs veld een waarde heeft in de afwezigheid van deeltjes, de zogenaamde vacuum verwachtingswaarde. Door deze reëel te kiezen hebben we tevens een referentiepunt ten opzichte waarvan complexe fases worden vastgelegd. Het pseudoscalaire foton veld en de bijbehorende lading beschrijven de fase in een veldentheorie met een onderliggende U(1) ijsymmetrie. Maar het 1D raamwerk is te eenvoudig om de twee- en drievoudige symmetrieën in het SM te beschrijven. Wel is de 1D theorie supersymmetrisch, d.w.z. er is een fermion $\longleftrightarrow$ boson symmetrie.

Mijn persoonlijke insteek is om het 1D tijd-ruimte raamwerk met chirale fermionen, scalair Higgs deeltje en pseudoscalair foton uit te breiden tot een zogenaamde *drieledige* of *tripartite* ruimte, het tensorproduct van drie identieke 1D Hilbert ruimtes, analoog aan de uitbreiding van de 1D naar 3D harmonische oscillator. In die tensorruimte kunnen we de 1D ruimtes van een label voorzien. Omdat de permutatie van labels een ongebroken symmetrie is ligt identificatie met de drie kleuren voor de hand. De totale Hilbert ruimte verandert niet onder verwisseling van kleuren, netjes in overeenstemming met een ongebroken SU(3) kleursymmetrie. Het argument voor een tripartite ruimte is simpelweg dat een *tweeledige* of *bipartite* ruimte nog steeds te eenvoudig is, terwijl een tripartite ruimte alle complicaties van algebraïsche ruimtes zonder nuldelers in zich heeft zoals non-commutativiteit en non-associativiteit. Met name is drievoudige symmetrie belangrijk om verschillen te hebben in structuur voor deeltjes en antideeltjes. Wat *multipartite* tensorruimtes zo uniek maakt in kwantummechanica is het fenomeen van *kwantumverstrengeling* (EN: *quantum entanglement*).

Kwantumverstrengeling in *multipartite* ruimtes

Om twee of meer toestanden tegelijkertijd te beschrijven, kijken we naar producttoestanden in tensorruimtes. Beginnende met de simpele Hilbertruimte met qubit structuur $\mathcal{H} = \{|L\rangle, |R\rangle\}$, hebben we de bipartite ruimte $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = \{|RR\rangle, |RL\rangle, |LR\rangle, |LL\rangle\}$. De gekozen basistoestanden zijn producttoestanden $|RR\rangle = |R\rangle \otimes |R\rangle$, etc. De volledige verzameling toestanden in deze ruimte worden gevormd door lineaire combinaties van deze basistoestanden. We krijgen dan het fenomeen van *verstrengeling* of *entanglement*.

²Specifieke modellen zijn bijvoorbeeld het Schwinger model of het Wess-Zumino model in 1D.

Een voorbeeld is de toestand $|RR\rangle + |LL\rangle$. Probeer die maar eens als een product te schrijven, zoals bijvoorbeeld wel kan voor $|RR\rangle + |RL\rangle = |R\rangle \otimes (|R\rangle + |L\rangle)$. Superposities van producttoestanden die niet als product te schrijven zijn heten verstrengelde of entangled toestanden. Verder moeten we daarbij het feit dat een basiskeuze in beide ruimtes niet uniek is in aanmerking nemen. Bijvoorbeeld de toestand $RR + LL$ gaat over in $RR + LL \rightarrow RL + LR$ via een eenvoudige verandering van basis $R \rightarrow L$ en $L \rightarrow R$ in de tweede ruimte, wat die toestanden equivalent maakt. Dat in aanmerking nemend, is de productruimte slechts 2-dimensionaal en vormen alle verstrengelde toestanden in de bipartite qubitruimte slechts één klasse, namelijk die van de Bell toestanden, met in de *bipartite* ruimte $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, als representatieve (genormeerde) toestand

$$|\text{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|RL\rangle + |LR\rangle).$$

Het lukt niet om deze toestand als product te schrijven. Wel is een meting of lokale interactie, bijvoorbeeld een meting in de eerste ruimte, genoeg om ook de toestand in de tweede ruimte te weten. Het zijn Bell toestanden die een rol spelen in de befaamde Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) paradox.

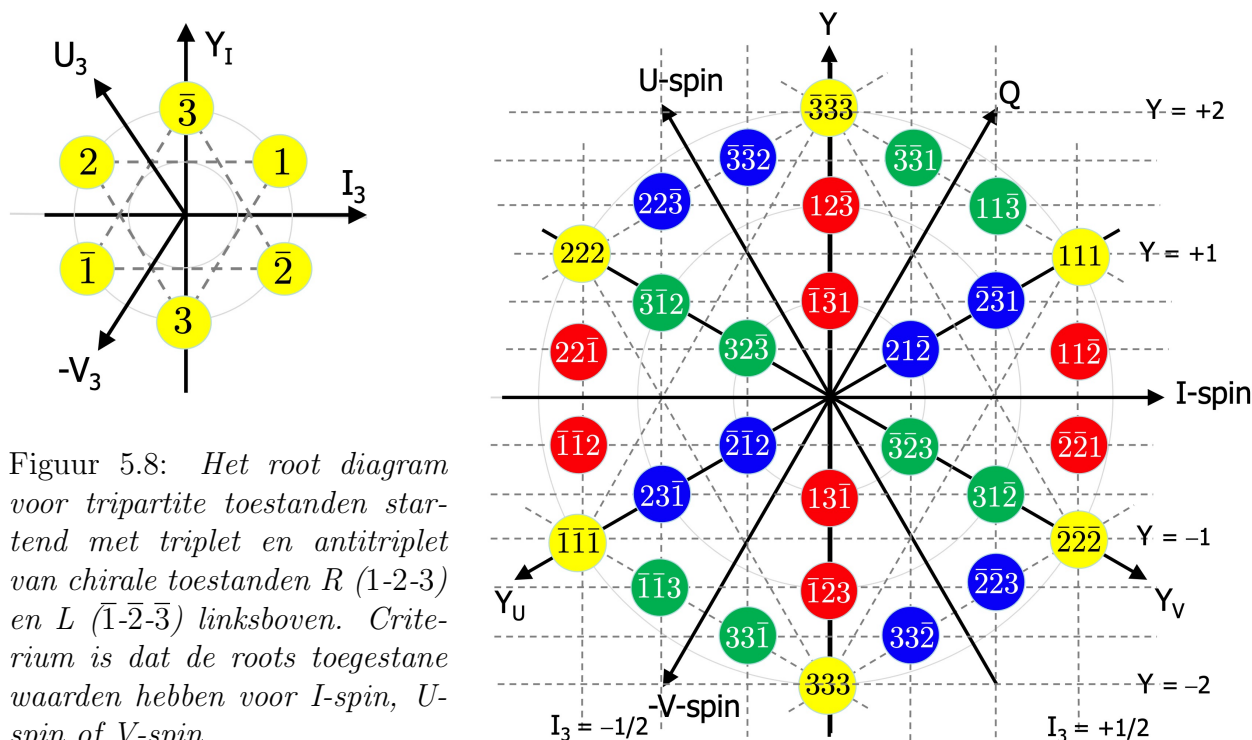
In de *tripartite* ruimte $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, zijn er twee niet-equivalente soorten van verstrengelde toestanden met als (genormeerde) representanten

$$\begin{aligned} |\text{GHZ}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|RRR\rangle + |LLL\rangle), \\ |\text{W}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|RRL\rangle + |RLR\rangle + |LRR\rangle), \end{aligned}$$

De Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) klasse is fragiel en alles ligt vast na één lokale interactie of meting, De W -klasse (en ook de $\overline{W}$ -klasse met LLR toestanden) is robuust en blijft verstrengeld na één interactie.

Wanneer we nu de toestanden opgebouwd uit een triplet van rechtshandige R-toestanden en een antitriplet van linkshandige L-toestanden combineren tot toestanden in de tripartite Hilbert ruimte en alleen toestanden toelaten met toegestane $SU(2) \times U(1)$ roots voor I-, U- of V-spin krijgen we het patroon in figuur 5.8. In het patroon vinden we zes GHZ toestanden, de toestanden 111, etc. Deze toestanden hebben de structuur van een triplet + antitriplet en ze hebben toegestane roots voor I-spin, U-spin *en* V-spin. Identificatie met de lepton en anti-lepton multipletten in sectie 5.3 ligt voor de hand, al blijft er binnen $SU(3)$ nog symmetrie over. Allereerst vormen de GHZ toestanden kleur singlets. De $SU(2) \times U(1)$ symmetrie voor de GHZ toestanden in figuur 5.8 bepalen de elektrozwakke kwantumgetallen van de chirale toestanden. In de tripartite ruimte blijven transformaties tussen inbeddingen van deze symmetrie in de hele tripartite Hilbert ruimte mogelijk. Voor de lepton toestanden zijn dat niet alleen de discrete I-U-V inbedding met de genoemde Z_3 symmetrie alsmede de CPT symmetrie, maar ook reële $O(3)$ rotaties voor de impuls toestanden in de R-L gekoppelde ruimtes. De transformaties (1 boost en 2 translaties) in de 1D (1+1 ruimte-tijd) en de $O(3)$ rotaties geven precies de Poincaré transformaties in 3D (3+1 ruimte-tijd), namelijk de 4 translaties, 3 boosts en 3 rotaties. Er is voor leptonen weliswaar de beperking tot volledig gebroken pariteit P en ongebroken CP-symmetrie, tenminste in dit stadium zonder kwantumcorrecties, maar ook dat is allemaal in overeenstemming met het SM..

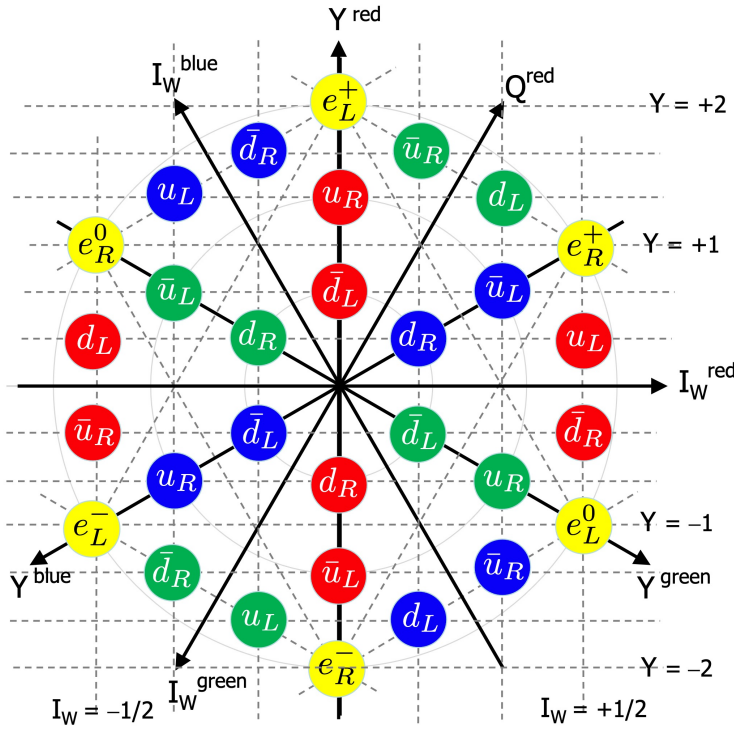
Dan zijn er de 8×3 W - en $\overline{W}$ -toestanden, die toegestane roots hebben voor I-spin, U-spin *of* V-spin. We kunnen deze klassen identificeren met quarks en hun kleuren. Bij de quarks identificeren we I-spin met zwakke isospin voor een van de quarkkleuren, zeg rood,



U-spin met isospin voor blauw en V-spin met isospin voor groen, waarbij er overigens de vrijheid van permutaties van de kleuren blijft (zie figuren 5.8 en 5.9). De elektrozwakke structuur van quark doubletten en singletten in sectie 5.3 is de intrigerende uitkomst van deze identificatie. De toestanden behoren tot de W - of $\overline{W}$ -klassen van verstrengelde toestanden, die via CP-spiegeling in elkaar overgevoerd worden. Net als bij de geladen leptonen, komen de quarks in paren van chirale toestanden zowel onder CP paren als onder P. Bij de quarks leidt de structuur in de W -klasse altijd tot ladingen, $\pm 2/3$ of $\pm 1/3$ en ze koppelen dus aan het foton. De identificatie van I-U-V met de elektrozwakke isospin voor de drie kleuren in fig. 5.9 lijkt in eerste instantie een drastische stap, maar omdat de kleursymmetrie ongebroken is en er in de 3D wereld alleen kleur singletten voorkomen, lost dit probleem zich vanzelf op. De elektrozwakke structuur voor quarks en antiquarks passend bij de W en $\overline{W}$ klassen van verstrengelde toestanden is in ieder geval heel bevredigend. Net als voor leptonen laten die de CP-symmetrie zien. In dit geval is de SU(3) symmetrie al helemaal gebruikt en is er voor de gekleurde deeltjes geen 3D ruimtelijke structuur, maar in wezen slechts een 1D LR-gekoppelde structuur. Maar voor de uiteindelijke singlet kleurconfiguraties, wat dus combinaties van quarks, quarks en antiquarks en/of gluonen vereist, komt de vrijheid van O(3) rotaties weer terug en krijgen we baryonen en mesonen levend in 3D.

Drie ‘universele’ families

Binnen SU(3) blijft er na identificatie van de symmetrieën een basale drievoudige Z_3 ‘doorschuif’ symmetrie over die het toestaat om voor zowel quarks als leptonen in de tripartiete ruimte de toestanden relatieve fases $(1, 1, 1)$, $(1, \omega, \omega^2)$, of $(1, \omega^2, \omega)$ te geven, waar $\omega = e^{2i\pi/3}$ oftewel $\omega^3 = 1$. Deze vrijheid laat drie families van deeltjes toe, met identieke elektrozwakke structuur (*universaliteit*). Overigens is er slechts voor één combinatie de mogelijkheid om de reële L en R toestanden te koppelen tot massieve toestanden, wat



Figuur 5.9: Identificatie van de tripartite toestanden in figuur 5.8 met de chirale quark en lepton toestanden van het SM voor de eerste generatie. De tripartite kwantum verstrengeling leidt tot een natuurlijke opsplitsing van deze toestanden in 6 GHZ toestanden geïdentificeerd met leptonen in 3D en 8×3 W-toestanden geïdentificeerd met 8 quarks in 1D met 3 kleuren en voor de quarks de identificatie $I_3 \rightarrow I_W^{\text{red}}$, $U_3 \rightarrow I_W^{\text{blue}}$ en $-V_3 \rightarrow I_W^{\text{green}}$.

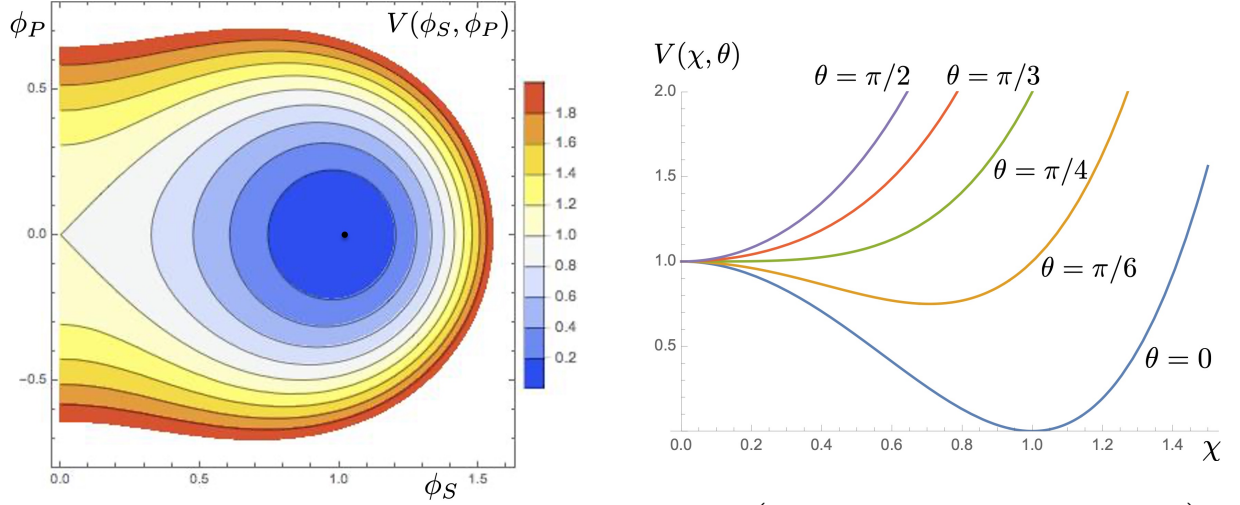
impliceert dat de twee andere combinaties massaloze fermionen hebben. De massa's in de 'lichte' families moeten dan van kwantumeffecten ten gevolge van menging van families komen.

Afmetingen versus 'puntvormig'

Tenslotte nog even over afmetingen. De verstrengelde toestanden in figuur 5.8 staan los van het al dan niet combineren van L en R tot impulstoestanden, dus ruimte en tijd spelen nog geen rol voor deze chirale toestanden. Dat betekent dat we op het niveau van verstrengelde tripartite quarks en leptonen werken met fundamentele vrijheidsgraden zonder afmetingen. Op het moment dat we bijvoorbeeld voor de quarks chirale toestanden tot impulstoestanden combineren en deze weer combineren tot kleur singlet baryonen en mesonen krijgen we ook verstrengeling van die impulstoestanden en daarmee corresponderend ruimte-tijd structuur, al is dat enkel mijn manier om de nog onbegrepen details van kleuropsluiting te formuleren in de context van tripartite verstrengeling.

5.6 De ijkveldentheorie en het Higgs mechanisme

Symmetrie voor *identieke* toestanden gekenmerkt door ladingen ligt aan de basis van de ijktheorieën. Het is als beginnen met het reële getal $\phi_S = 1$, dit uitbreiden met 'trillingen' rondom 1 en vervolgens tot complexe getallen $\phi\sqrt{2} \sim \phi_S + i\phi_P$. In veldentheorieën bevatten de velden creatie en annihilatie operatoren voor de trillingen, de deeltjestoestanden in de Hilbertruimte met als beginpunt voor het scalaire veld daarnaast een bijdrage die er altijd is, ook in de afwezigheid van deeltjes, de zogeheten vacuum verwachtingswaarde (vev). Die vev is het reële getal vermenigvuldigd met de eenheidsoperator, zodat $\langle 0|\phi_S|0\rangle = 1$. De trillingen worden dan als afwijkingen van 1 beschreven, dus $\phi_S = 1 + \varphi_S$



$$V(\phi) = \frac{1}{8}M^2(2\phi^2 - 1)(2\phi^{*2} - 1) \quad \text{of} \quad V(\chi, \theta) = \frac{1}{8}M^2 \left(\chi^4 \sin^2(2\theta) + (\chi^2 \cos(2\theta) - 1)^2 \right)$$

Figuur 5.10: *Representaties van de potentiaalfunctie voor de (complexe) bosonvelden $\phi\sqrt{2} = \phi_S + i\phi_P = \chi e^{i\theta}$ in de meest algemene 1D supersymmetrische theorie. Links de contourplot $\phi\sqrt{2} = \phi_S + i\phi_P$, rechts van de potentiaalfunctie voor de (complexe) bosonvelden $\phi\sqrt{2} = \chi e^{i\theta}$. De kromme voor $\theta = 0$ is de Higgs potentiaal met het minimum voor $\chi = 1$ corresponderend met de vacuum verwachtingswaarde van het Higgs veld.*

en $\phi_P = \varphi_P$ waarbij de velden φ zonder vev alle mogelijke trillingen bevatten in een vorm zoals in vgl. 3.5 met golfvelden vermenigvuldigd met creatie- of annihilatieoperatoren voor deeltjes. We kunnen ook de productrepresentatie $\phi \sim \chi e^{i\theta}$ kiezen met alleen voor het veld χ een vev. Ook voor fermionvelden is de verwachtingswaarde nul en beschrijven de links- en rechtshandige chirale velden ξ_L en ξ_R deeltjes. Veldentheorie beschrijft hoe combinaties van velden trillingen veranderen in frequentie en golflengte, al dan niet na absorptie van een trilling of na emissie van nieuwe trillingen. Die trillingen met frequentie en golflengte zijn niets anders dan de bosonen met energie en impuls waarbij specifieke deeltjes massa en spin als kenmerk hebben en daarnaast de eigenschappen en ladingen die corresponderen met vrijheidsgraden die zich onderscheiden via hun algebraïsch gedrag onder conjugatie, verwisseling, etc. Met twee- en drievoudige symmetrie kunnen we het SM realiseren. Mogelijk, zoals in de vorige sectie besproken, kunnen we met een triplet (en antitriplet) basis in een tripartite R/L qubit ruimte starten zoals in fig. 5.8.

We schrijven $\phi\sqrt{2} = \chi e^{i\theta}$ voor de boson velden. Supersymmetrie vereist naast koppelingen tussen fermionen en bosonen zoals gerepresenteerd in de vertices voor scalaire stuk χ en pseudoscalaire stuk θ , ook een koppeling tussen de bosonen onderling. Deze is van de vorm,

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{1}{8}M^2(2\phi^2 - 1)(2\phi^{*2} - 1) \\ &= \frac{1}{8}M^2 \left(\chi^4 \sin^2(2\theta) + (\chi^2 \cos(2\theta) - 1)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

met minimum bij $\phi = \phi^* = 1/\sqrt{2}$ of $\chi = 1$ en $\theta = 0$. Voor deze potentiaal is een contourplot en specifiek gedrag voor verschillende constante fases θ gegeven in figuur 5.10. In het simpelste geval is het gedrag rondom het minimum in de richting van χ en θ of equivalent ϕ_S en ϕ_P hetzelfde, wat impliceert dat de massa van Higgs gelijk is aan massa van krachtdeeltje. In het geval van meervoudige symmetrieën wordt θ gegeneraliseerd

tot de fases zoals besproken in sectie 5.2. Dat geeft afhankelijk van de symmetrie de krachtdeeltjes in sectie 5.3. Wat blijft is het unieke Higgs veld waarvoor we de potentiaal vinden via de reële expansie rond het minimum. We schrijven $\chi = 1 + H$ en nemen $\theta = 0$, wat de Higgs potentiaal oplevert,

$$\begin{aligned} V(\chi) &= \frac{1}{8}M^2 (\chi^2 - 1)^2 \\ &= \frac{1}{2}M^2 (H^2 + H^3 + \frac{1}{4}H^4) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dit is de potentiaal geschets als de $\theta = 0$ lijn in rechterfiguur 5.10. Het is de dwarsdoorsnede van de befaamde Mexicaanse-hoed-potentiaal. Met extra vrijheidsgraden zoals een rotatie wordt de doorsnede dan vanzelf de Mexicaanse hoed. Er zijn dan meerdere minima, bijvoorbeeld in 3D vier kandidaat Higgs-velden h^0 , $\bar{h}^0$, h^+ en h^- , met kwantumgetallen zoals aangegeven in figuur 5.5. Dan schrijven we die velden als $\chi = \chi_0 e^{i\theta_0}$ en uiteindelijk zal er slechts één scalaire Higgs combinatie zijn, voor het genoemde kwartet $\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(h^0 + \bar{h}^0)$, die een vacuumverwachtingswaarde heeft, een fenomeen dat bekend staat als *spontane symmetriebreking*. De andere drie Higgs-veld componenten worden onderdeel van $W^\pm$ en Z^0 velden, die daardoor anders dan het foton, massa krijgen wat zich qua vrijheidsgraden manifesteert via drie spin projecties $m = +1, 0$ en -1 . Het massaloze foton heeft slechts de originele twee mogelijke spin projecties, $m = \pm 1$.

Een ander aspect van ijkveldentheorieën is de specifieke vorm van de wisselwerkingen. De fermionen zijn de dragers van de fundamentele vrijheidsgraden met chiraliteit, kleur en elektrozwakke ladingen. Identieke chirale R/L fermion toestanden (wat betreft lading) worden gekoppeld via een uniek scalair Higgs boson. Andere vrijheidsgraden vormen, voor R en L afzonderlijk, multipletten onder de verwoven $S(U(2) \times U(3))$ symmetrie³, waarin de mogelijke transformaties binnen multipletten corresponderen met koppelingen van krachtdeeltjes. Dit wordt allemaal beschreven binnen het raamwerk van een ijkveldentheorie als fasedraaiingen in de ruimte van vrijheidsgraden. Bovendien kunnen de fasedraaiingen in ieder ruimte-tijd punt anders zijn. Hierbij roepen we ook nog even in herinnering dat ruimte en tijd namelijk niets anders zijn dan parameters voor de fases van deeltjes in de lopende vlakke golven.

In een ijkveldentheorie is er een samenhang tussen de veranderingen in ruimte en tijd en de veranderingen in de (zeg 3-dimensionale) interne ruimte voor boson en fermionvelden netjes beschreven via pad-geordende exponenten. We illustreren dat voor fermionvelden,

$$\xi^i(x) = \mathcal{P} \exp \left(\int_{\text{pad}}^x ds^\mu (D_\mu)^{ij}(s) \right) \xi^j(0), \quad (5.7)$$

maar er zijn analoge vergelijkingen voor bosonvelden, de scalaire Higgs velden ϕ en pseudoscalaire (of in 3D vector) krachtvelden A_μ . De fermionvelden zijn de chirale fermionvelden (ξ_R en ξ_L) met een index i in de interne ruimte die staat voor kwantumgetallen zoals kleur of electrozwakke ladingen. In bovenstaande compacte uitdrukkingen staat de exponent $\mathcal{P} \exp(\dots)$ bekend als een pad-geordende exponent. In de exponent zien we een operator, de covariante afgeleide D , die veranderingen in ruimte-tijd *en* interne vrijheidsgraden combineert via

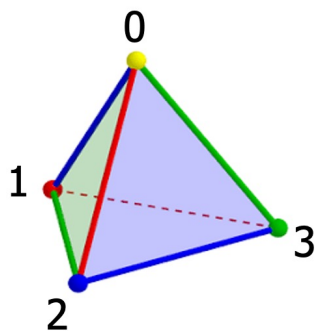
$$i(D_\mu)^{ij} = i\mathbb{I}^{ij}\partial_\mu + \sum_a gA_\mu^a(x)(T_a)^{ij}. \quad (5.8)$$

³ $S(U(2) \times U(3))$ staat voor $U(2)$ en $U(3)$ in dezelfde (tripartite) ruimte met eliminatie van overall $U(1)$. Het correspondeert met de $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ symmetrie van het SM met $U(1)$ passend binnen $SU(3)$.

De eerste term in de covariante afgeleide is de ‘gewone’ afgeleide met een Minkowski index, zoals $\partial_0 = \partial/\partial x^0 = \partial/\partial t$. Die term doet verder niets met de interne vrijheidsgraden, $\mathbb{I}^{ij}$ is de eenheidsoperator in interne ruimte. De afgeleide is de operator die in de kwantummechanica de evolutie in tijd en ruimte beschrijft via de hamiltoniaan en de impulsoperator (zie sectie 2.3). Zonder de tweede term in vgl. 5.8, is de covariante afgeleide hetzelfde als de gewone afgeleide en is bovenstaande vgl. 5.7 wordt bijna vanzelfsprekend. De vergelijking zegt dan dat je langs een pad (daar staat $\mathcal{P}$ voor) in een of meerdere (expansie van exponent) stapjes (de integraal) loopt van referentiepunt 0 naar punt x waarbij je de afgeleide langs het pad (inproduct $ds \cdot \partial$) gebruikt om de verandering van ξ bij te houden. In 1D zijn dat 2 translaties en 1 boost, in 3D zorgt de vergelijking juist door opsplitsing in stukjes (het exponentiëren) er voor dat rotaties meegenomen worden. De tweede term in vgl. 5.8 bevat de ingrediënten voor de emissie en absorptie van krachtvelden inclusief de corresponderende transformaties in de ruimte van interne vrijheidsgraden. Die tweede term staat bekend als ijklink. Bedenk dat we voor alle transformaties krachtdeeltjes hebben, waarbij de index a de index voor de krachtdeeltjes is die hoort bij een transformatie beschreven met matrixelementen $(T_a)^{ij}$ van matrices T_a , die de symmetrie genereren. Die matrices husselen de interne vrijheidsgraden door elkaar, bijvoorbeeld voor SU(3) de acht Gell-Mann matrices voor de kleuren van de quarks met acht bijbehorende gluonen of de Pauli matrices voor elektrozwakke ladingen met bijbehorende W -bosonen. Het feit dat twee covariante afgeleides niet verwisselbaar zijn en de verandering van velden afhangt van de specifieke weg correspondeert in een ijktheorie met de aanwezigheid van elektrische en magnetische velden, die voldoen aan Maxwell vergelijkingen. De topologie van de ijklink zien we in de Maxwell vergelijkingen terug, bijvoorbeeld in het feit dat de kringintegraal $\oint ds \cdot \mathbf{A}$ langs een gesloten curve precies gelijk is aan de flux $\int d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}$ van het magnetisch veld door de oppervlakte omsloten door de curve (zie Aharonov-Bohm experiment in sectie 5.4).

5.7 Het fundament van het SM

Ik schets hieronder samenvattend nogmaals de basis principes waarop het SM is gebouwd met een nadruk op bovengenoemde kwantum verstrengeling, maar daarnaast de principes bij het zoeken naar wat er zich buiten of onder het SM bevindt. Bouwend op deze principes wordt vaak geprobeerd het SM uit te breiden. De noodzaak daarvan komt meestal van afwijkingen in gedrag van deeltjes of aanwijzingen voor nieuwe deeltjes. Het begint wel

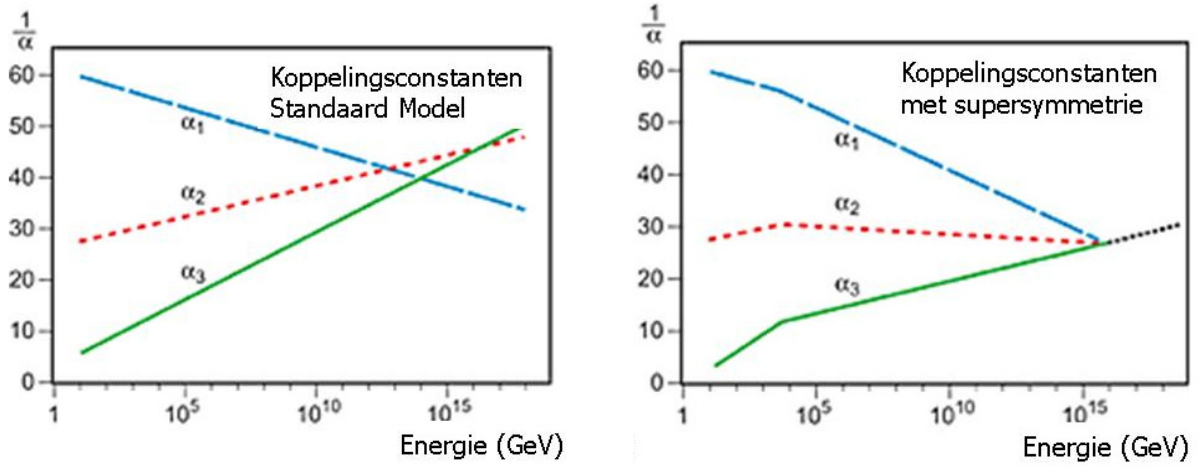


Figuur 5.11: Bij de tripartite uitbreiding van de 1D wereld naar een 3D wereld worden de discrete symmetrieën het eenvoudigste geïllustreerd als permutaties die een vierhoek met hoekpunten 0, 1, 2, 3 in zichzelf overvoeren. Dat is de permutatiegroep S_4 of met behoud van oriëntatie de groep A_4 van even permutaties. De zijden 01, 02 en 03 representeren 1D ruimtes en de hele vierhoek de 3D Minkowski ruimte. De groep A_4 wordt gegenereerd uit tweevoudige CP-achtige permutatie $S = (01)(23)$ en drievoudige permutatie $T = (123)$ met eigenschappen $S^2 = T^3 = (ST)^3 = 1$.

steeds met een set van identieke toestanden in een complexe Hilbertruimte. Wij hebben dat gepresenteerd als de twee identieke licht-achtige toestanden (met $E = |\mathbf{p}|c$) die na koppeling via massa in 1D een chirale qubit structuur met rechts- en linkslopers ($pc = \pm E$) opleveren. Dit levert een 1D Hilbert ruimte $\mathcal{H}_{1D}$ met CP- en T-symmetrie waarin tijd een richting heeft. Met ladingen gekoppeld aan een externe complexe U(1) fase krijgen we onderscheid tussen deeltjes en antideeltjes met tegengestelde ladingen en het foton als krachtdeeltje verschijnt, in 1D met een opsluitende lineaire potentiaal. Op dat moment werken we binnen het raamwerk van een kwantumijkveldentheorie. In de uitbreiding van de qubit ruimte naar een tripartite Hilbert ruimte $\mathcal{H}_{1D} \times \mathcal{H}_{1D} \times \mathcal{H}_{1D}$ kunnen diverse twee- en drevoudige symmetrieën van het SM gerealiseerd worden. Hier hebben we dan deeltjes met energie en drie impulscomponenten in 3D, met een Minkowski structuur voor $(E, \mathbf{p}c)$ en vlakke golven als de complexe fases van die deeltjes met één tijd en drie ruimterichtingen $(ct, \mathbf{r})$ als parameters. Naast de discrete verwisselingssymmetrieën C, P, en T krijgen we een extra discrete symmetrie, *triality*, die de ruimterichtingen verwisselt met behoud van oriëntatie. We hebben dan alle permutaties van tijd-ruimte richtingen als een vierhoek (S_4 groep). waarbij de discrete symmetriegroep van even permutaties met één vast hoekpunt (de tijd-richting), bekend is als A_4 symmetrie (zie Fig. 5.11). Het is deze symmetrie die 3 families van deeltjes toelaat. Complexe fases vormen een $S(U(2) \times U(3))$ symmetrie voor beide chiraliteiten met enkel interne fases (de S van speciale unitaire symmetrie elimineert de overall fase). Houvast blijft daarbij het vacuum dat links-rechts symmetrisch en neutraal is en aanleiding geeft tot één unieke vacuum verwachtingswaarde behorend bij het Higgs veld dat invariant is onder alle transformaties, in het bijzonder ook de interne U(2) symmetrieën, zwakke isospin I_W en hyperlading Y .

De onderliggende chirale qubit structuur van de tripartite Hilbertruimte laat voor fermionen twee klassen van verstrengelde toestanden toe, de GHZ klasse van leptonen en de W klasse van quarks waarbij de laatste de meest verstrengelde toestanden zijn met de maximale SU(3) symmetrie in de tripartite ruimte. De klassen zijn ontkoppeld in de zin dat ze weliswaar in één overall Hilbertruimte leven, maar er geen lokale interactie (zich afspelend in één enkele subruimte) is die toestanden in elkaar overvoert. Interacties kunnen wel plaatsvinden en kwantumgetallen inclusief energie en impuls worden overgedragen via lokale interacties met bosonen als intermediair zoals beschreven in voorgaande sectie. Dat kunnen (deels) dezelfde bosonen zijn voor beide klassen, met name de elektrozwakke bosonen die horen bij een $U(2) \cong SU(2) \times U(1)$ symmetrie. De gluonen, horende bij de maximale SU(3) symmetrie, werken alleen binnen de W en $\bar{W}$ klasse van quarks. Gekleurde quarks en gluonen leven in een 1D wereld. De reële orthogonale SO(3) rotaties zijn voor hen onderdeel van de complexe unitaire SU(3) transformaties, gerealiseerd in een niet-abelse SU(3) ijktheorie. De kleurloze baryonen en mesonen, opgebouwd uit quarks, antiquarks en gluonen laten nog steeds reële rotaties toe en zijn toestanden in de 3D wereld. Wel worden bij het opbouwen van deze hadronen impuls en ruimte-tijd van belang, wat betekent dat chiraliteit gecombineerd is tot impuls. Als gevolg daarvan zijn hadronen kwantumtoestanden in 3D met eindige afmetingen en gebroken chiraliteit. In de 3D wereld kunnen de hadronen op hun beurt weer gecombineerd worden tot atoomkernen en atomen. Dat laatste gebeurt in combinatie met leptonen die als kleur-neutrale deeltjes ook in de 3D wereld leven. Terwijl in 1D voor elektromagnetisme de potentiële energie groeit met de afstand, wordt dat een afvallende $1/r$ potentiaal in 3 dimensies.

Er zijn over de jaren diverse pogingen gedaan tot unificatie in een *Grand Unified Theory* (GUT). Het dichtst bij de tripartite ruimte met een verstrengelde $S(U(2) \times U(3))$



Figuur 5.12: De koppelingsconstanten, $\alpha_i = g_i^2/4\pi\hbar c$ voor de elektrozwakke kracht (α_1 en α_2) en voor de sterke kracht (α_3), geplotted als $1/\alpha_i$ als functie van de schaal, hier gegeven als een energieschaal. De sterke kracht neemt bijvoorbeeld af bij grotere energieën (is kleinere afstanden), bekend als asymptotische vrijheid. De krachten convergeren redelijk (links), een convergentie die nog verbeterd lijkt te worden bij het bestaan van supersymmetrie (zie <http://nobelprize.org/nobelprizes/physics/laureates/2004/public.html>).

symmetrie is $SU(5)$ met de elektrozwakke en kleurvrijheidsgraden naast elkaar gezet als 5 onafhankelijke vrijheidsgraden. Dat laatste lijkt eenvoudiger, maar het lukt niet om de deeltjes onder te brengen in de basismultipletten (quintet $\underline{5}$ en $\underline{5}^*$). Er zijn voor de fermionen 2 multipletten en corresponderende anti-multipletten voor nodig. Overigens is er met een reële $SO(10)$ symmetrie wel de mogelijkheid om 16 deeltjes (inclusief een extra neutrino) onder te brengen in één multiplet, d.w.z. één deeltje met 16 ‘ladingstoestanden’, maar daar komen we ook niet veel verder mee. Het bestaan van een samengestelde onderliggende symmetrie begint dan wel erg gekunsteld te lijken. Niet alleen linkshandige elektronen en neutrino’s worden als identiek beschouwd, slechts verschillend door er een zwakke lading aan toe te kennen die de deeltjes identificeert als behorend tot één doublet. Maar in $SU(5)$ hebben we ook nog eens multipletten met zowel quarks als leptonen.

Een van de redenen voor unificatie is ook een verklaring te vinden voor de sterktes van de koppelingen van alle quarks en leptonen aan fotonen, W en Z -deeltjes en die van quarks aan gluonen. In eerste instantie lijkt het ook alsof er drie krachten zijn met verschillende sterktes, dus een samengaan van drie symmetrieën, bekend als $SU(3)_{\text{kleur}} \otimes SU(2)_{\text{isospin}} \times U(1)_{\text{hyperlading}}$. Maar ook koppelingsconstanten zijn niet zo constant als de naam suggereert. Als we de afstanden kleiner maken of, equivalent, deeltjes laten botsen bij hogere energieën gaan kwantumcorrecties een rol spelen. Een foton kan zich manifesteren als een elektron-positron paar, een quark als een quark-gluon paar, etc., net zoals we gezien hebben in het voorbeeld van het anomaal magnetisch moment (zie Fig. 3.6) in hoofdstuk 3⁴. Deze ‘aankleding’ van deeltjes veroorzaakt een schaal-afhankelijkheid in de massa’s en koppelingsconstanten. Voor de koppelingen, $\alpha_i = g_i^2/4\pi\hbar c$ van de drie afzonderlijke symmetrieën is deze in figuur 5.12 gegeven. De beginsituatie bij afstanden

⁴De fijnstructuurconstante die op atomaire schaal de waarde $\alpha = 1/137$ heeft veranderd naar $\alpha(100 \text{ GeV}) \approx 1/127$.

van zo'n 10^{-18} m en energieën van zo'n 100 GeV, is $1/\alpha_{\text{em}} \sim 127$ en $1/\alpha_{\text{strong}} \sim 6$ vertaald naar U(1), SU(2) en SU(3) koppelingen in fig. 5.12. Het verloop laat zien dat bij een energie van de orde van 10^{15} GeV (afstand 10^{-31} m) de sterktes van dezelfde orde van grootte worden, wat wijst op een mogelijke overkoepelende GUT. Die hoge energieschaal of kleine afstand zou dan het domein zijn waar de symmetrie werkt. Daar komt dan wel bij dat er op die schalen ook krachtdeeltjes zouden moeten bestaan die elektrozwakke in kleurladingen veranderen, zogenaamde *leptoquarks*. Een van de consequenties zou zijn dat protonen kunnen vervallen, bijvoorbeeld $u + d \rightarrow L^{-+1/3} \rightarrow e^+ + \bar{u}$, wat gecombineerd met de andere u quark leidt tot $p \rightarrow e^+ \pi^0$ met afhankelijk van details zoals de massa's van leptoquarks een leeftijd in de orde van 10^{30} tot 10^{34} jaar. De experimentele limiet bij de faciliteiten die zich tegenwoordig voornamelijk concentreren op neutrino experimenten (zie hoofdstuk 7) sluiten dat soort leeftijden al uit. Het proton is voor zover we weten stabiel! Bovendien is bij 5 ladingsvarianten zoals in SU(5) is de voorspelling voor de menging van elektrozwakke krachtdeeltjes $\sin^2 \theta_w = 3/8$, wat veel verder van de experimentele waarde $\sin^2 \theta_w = 0.231$ dan de $S(U(2) \times U(3))$ voorspelling $\sin^2 \theta_w = 1/4$ zoals we die gezien hebben in het kader over menging van krachtdeeltjes in hoofdstuk 5.4. Daar staat tegenover dat ook de menghoek θ_w schaal-afhankelijk is.

De hierboven besproken convergentie van de krachten kan overigens beter worden wanneer er deeltjes bestaan met massa's in het bereik van 100 GeV tot de unificatieschaal. Om alle kwantumcorrecties bovendien berekenbaar te houden zou het mooi zijn als er voor ieder van de bekende bosonen (deeltjes met heeltallige spin) een fermion zou zijn en voor ieder van de bekende fermionen (deeltjes met halftallige spin) een nieuw boson, dus bij de spin 1/2 quarks ook spin 0 *squarks* en bij het foton een spin 1/2 *fotino*, etc. In figuur 5.12 is de convergentie in die situatie ook gegeven. De uitgebalanceerde situatie van bosonen en fermionen staat bekend als *supersymmetrie*. Dit is helaas ook de keerkant voor zowel GUT's als SUSY, waardoor ze mogelijk afvallen als geschikte theoretische uitbreidingen van het standaardmodel. Voor de nieuwe categorieën van deeltjes die SUSY voorspelt is verder ook nog geen enkele aanwijzing gevonden en de limieten worden erg stringent, zeker als we graag een symmetrie hebben tussen deeltjes en hun super-partners.

De eerder besproken $S(U(2) \times U(3))$ structuur voor deeltjes lijkt een beetje op het rishon model dat werd voorgesteld door Michael Shupe (1979) en uitgebreid door Haim Harari en Nathan Seiberg (1982), waar ze quarks en lepton opbouwen uit preonen T (Tohu) en V (Vohu). De kritiek op preonen als deeltjes die in 3D bestaan is dat de elementaire deeltjes dan een substructuur krijgen, iets wat met de hierboven voorgestelde driedelige verstrengeling vermeden wordt, omdat de overgang van 1D naar 3D er onderdeel van is. En experimenteel is er tot nu toe geen enkele aanwijzing voor ruimtelijke (3D) substructuur, noch voor de quarks en leptonen, noch voor de ijkbosonen.

De magie van drie is dat twee te eenvoudig is en vier niet nodig!

Hoofdstuk 6

Met vereende krachten

In dit hoofdstuk meer over de daadwerkelijke praktijk van krachten. In het dagelijks leven hebben we met een heleboel krachten te maken. Die zijn echter terug te voeren tot twee basiskrachten, zwaartekracht en elektromagnetisme. Met name de laatste is een mooi voorbeeld, hoe meerdere krachten gevangen worden in één theorie. Wrijvingskrachten, toch wel zo'n beetje de meest essentiële kracht die ons in staat stelt recht overeind te staan en de zwaartekracht te weerstaan, is terug te voeren tot krachten tussen moleculen en atomen. Microscopisch zijn deze krachten tussen neutrale moleculen, waaronder de *van der Waals krachten*, terug te voeren op een niet-homogene verdeling van elektrische ladingen binnen de moleculen. Hetzelfde geldt in veel gevallen voor de krachten binnen de moleculen waar neutrale atomen bijeengehouden worden doordat binnen een atoom de elektronenbanen kleine verstoringen ondervinden door de aanwezigheid van andere atomen in de buurt.

Elektromagnetisme is een unificatie van elektrische en magnetische krachten. Terwijl statische elektrische ladingen aanleiding geven tot krachten op andere ladingen, waarvan de richting en de grootte met elektrische velden (kracht evenredig met lading en als eenheid Newton per Coulomb, N/C , of ook Volt per meter, V/m) wordt beschreven, geven bewegende ladingen (stromen) ook nog eens aanleiding tot krachten die gevoeld worden door bewegende ladingen. Deze effecten worden beschreven met magnetische velden (kracht evenredig met lading en snelheid en als eenheid $1 \text{ Tesla} = 1 \text{ N/Am}$ waar $1 \text{ A} = 1 \text{ Ampère} = 1 \text{ C/s}$).

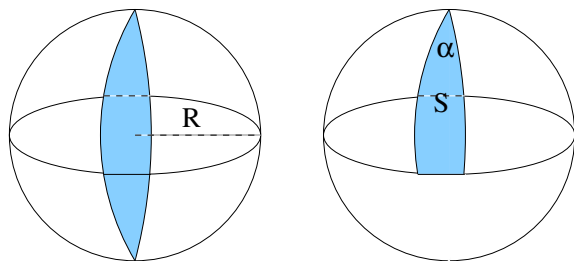
Met gravitatie en elektromagnetisme hebben we ook meteen de prototypes van alle krachten in de natuur te pakken. De zwakke en sterke krachten die een rol spelen bij sub-atomaire deeltjes zijn in essentie generalisaties van elektromagnetisme, waarbij symmetrie en kwantummechanica de trefwoorden waren, besproken in hoofdstuk 5. Daar bouwen we in dit hoofdstuk op voort, maar we beginnen met gravitatie.

6.1 Gravitatie en kromming van ruimte-tijd

Gravitatie of zwaartekracht heeft massa als bron van de kracht en kan alleen aantrekkend zijn. Massa is niet gekwantiseerd zoals ladingen. Het bijzondere van massa is dat het niet alleen de bron is van een kracht (de zwaartekracht), maar dat het ook bepaalt hoe op een kracht (en dat kan elke kracht zijn) gereageerd wordt, d.w.z. welke versnelling de massa krijgt. Dit staat bekend als het *equivalentieprincipe*. Op Aarde heeft het als consequentie dat alle massa's ten gevolge van de zwaartekracht een even grote versnelling krijgen

Gekromde ruimte

Een eigenschap van een gekromde ruimte is dat twee evenwijdig lijnen elkaar toch kunnen snijden (positieve kromming) of zich van elkaar verwijderen (negatieve kromming).



Dat is hiernaast geïllustreerd bij een bol. In een rechte lijn vertrekkende vanaf de zuidpool in verschillende richtingen wordt de beweging parallel bij de evenaar, waarna de lijnen op het noordelijk halfrond weer naar elkaar toe bewegen en tenslotte op de noordpool weer kruisen.

De kromming van een bol wordt gegeven door $k = 1/R^2$. Bijvoorbeeld, de kromming van een voetbal is $k \approx 50 \text{ m}^{-2}$. De kromming van de Aarde is veel kleiner, $k \approx 2,8 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2}$. De straal kunnen we niet direct meten als we op de bol zitten, maar we kunnen wel zien dat er iets gebeurt met evenwijdige lijnen of met driehoeken. In de oppervlak S omsluitende driehoek starten twee evenwijdige lijnen vanaf de evenaar die op de pool kruisen. Dus is de som van de hoeken meer dan 180 graden. Hieruit is de kromming te bepalen als $k = \alpha/S$ waar we de hoek α uitdrukken in radialen en voor S de oppervlakte van de driehoek invullen.

(meestal uitgedrukt als ‘even snel vallen’), tenminste als we effecten van luchtwrijving buiten beschouwing laten. De zwaartekracht is daarmee intrinsiek verwoven met de structuur van ruimte en tijd. Het equivalentieprincipe, het feit dat massa zowel de rol van trage als die van zware massa speelt, ligt ten grondslag aan de algemene relativiteitstheorie.

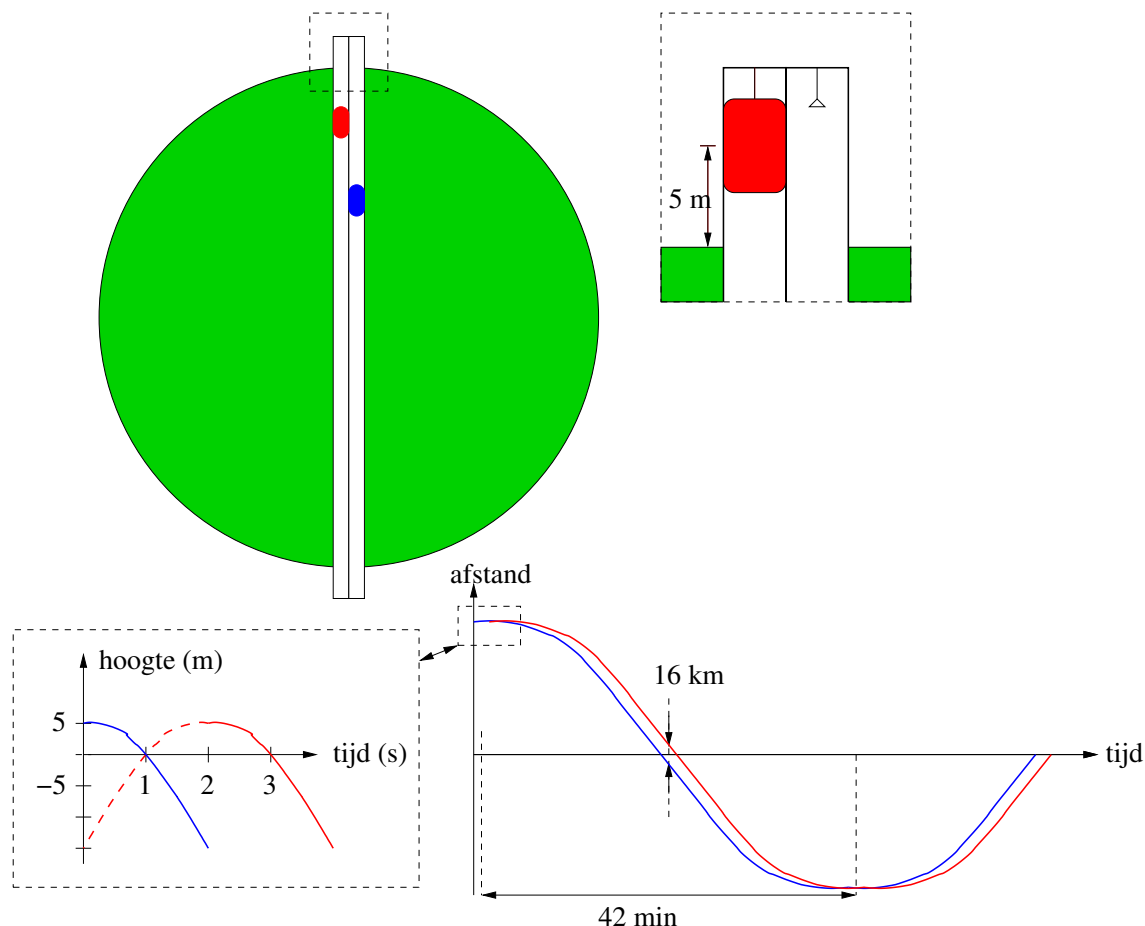
De algemene relativiteitstheorie beschrijft hoe massa de structuur van ruimte en tijd verandert zodanig dat in die gekromde wereld alle deeltjes vrij en ‘recht door’ bewegen. De waarnemer die uitgaat van een niet-gekromde ruimte ziet dat de deeltjes worden afgebogen (zie kader). Daar kan de aanwezigheid van massa uit worden afgeleid, onafhankelijk of die massa nu licht geeft of niet.

Overigens worden ook massaloze deeltjes, zoals fotonen, afgebogen. De verificatie van deze door Einstein gedane voorspelling was indertijd zeer opzienbarend en bevestigde de theorie. Tegenwoordig wordt de afbuiging van licht juist gebruikt om massa’s te zoeken. Bijvoorbeeld om te zoeken naar donkere materie in de ruimte tussen melkwegstelsels. Een tussen ons en een ververwijderd sterrenstelsel bewegend donker object veroorzaakt als een soort lens een focusering van het licht van zo’n sterrenstelsel met als gevolg dat tijdens de passage een versterking van de lichtintensiteit optreedt. Een andere toepassing is het op kosmische schaal zoeken naar zeer ververwijderde sterrenstelsels die door dichterbij staande massieve sterrenstelsels juist zichtbaar worden of die zich verraden doordat er meerdere beelden van ontstaan.

De koppeling van massa aan de structuur van ruimte en tijd, heeft als consequentie dat bewegende massa’s gravitatiegolven veroorzaken, trillingen van ruimte en tijd. Dit is niet anders dan dat bewegende ladingen elektrische en magnetische golven genereren. Net als voor het genereren van radiogolven energie nodig is, is dat ook nodig voor gravitatiegolven. Om de effecten te meten is eigenlijk niet meer nodig dan een ontvanger, al moet daar wel rekening worden gehouden met het karakter van gravitatiegolven. Die hebben een quadrupool karakter waarbij voor een golf bewegend in een richting (zeg z-richting) periodieke uitzetting-inkrimping in het vlak loodrecht daarop.

Gravitatie en kromming van ruimte-tijd

Een gedachtenexperiment: pendelende capsules die vrij vallend van de ene naar de andere kant van de Aarde bewegen.



De kromming van ruimte-tijd is te bepalen uit de beweging van vallende objecten. Bijvoorbeeld via het in de figuur geschetste gedachtenexperiment, waarbij twee capsules door een schacht van de ene kant van de Aarde naar de andere kant ‘vallen’. Als een capsule wordt losgelaten valt deze naar het centrum van de Aarde. Na 1 seconde is de capsule 5 m gevallen ($\frac{1}{2} g t^2$), na 2 seconden 20 m, etc. Met een beetje rekenwerk blijkt hij met zo’n 8 km/s door het middelpunt van de Aarde te zoeven en daarna weer langzamer te gaan, totdat hij aan de andere kant precies weer tot stilstand komt (even afgezien van wrijving e.d.). De trip duurt 42 minuten. Als we niets doen valt de capsule dan weer naar het middelpunt om bij het startpunt weer tot stilstand te komen, etc. De banen van 2 seconden na elkaar pendelende capsules in de figuur kunnen vergeleken worden met de 2 rechte lijnen (meridianen) op de bol in het vorige kader. De lengte van de meridiaan is ‘ πR ’ en correspondeert met 42 minuten wat uitgedrukt als een lengte (vermenigvuldigen met lichtsnelheid) $\pi R = 7,5 \times 10^{11}$ m geeft. We kunnen ook met de hoek α werken. In het begin verwijderen de capsules zich met 20 m/s van elkaar. Dat correspondeert met α . Bedenkend dat $1 \text{ s} = 3 \times 10^8 \text{ m}$ vinden we $\alpha = 0,67 \times 10^{-7}$. Uit de afstand van de capsules wanneer ze de maximale afstand hebben bereikt bij het middelpunt van de Aarde (16 km, want in tijd lopen ze 2 seconden uit elkaar en de snelheid was daar 8 km/s) en de hoek α kunnen we ook de ‘straal’ van de bol in ruimte-tijd berekenen, $R = (16 \text{ km})/\alpha = 2,4 \times 10^{11}$ m, hetzelfde resultaat als uit ‘ πR ’.

Gravitatie en kromming van ruimte-tijd (vervolg)

Samenvattend vinden we voor de kromming van de ruimte-tijd

$$k = 1/R^2 = 1,6 \times 10^{-23} \text{ m}^{-2},$$

echt klein! En het gaat hier om de kromming van de vier-dimensionale tijd-ruimte ten gevolge van de massa van de Aarde.

Het meten van de periodieke uitzetting-inkrimping in een van de loodrechte richtingen (zeg x-richting) die wordt gecompenseerd door een periodieke inkrimping-uitzetting in de andere loodrechte richting (zeg y-richting) is precies wat gravitatie-detectoren (zoals LIGO en VIRGO) via lengtevariatiën in die twee loodrechte richtingen meten en waarmee er nu een heel nieuwe manier is gevonden om zwarte gaten en neutronensterren te bestuderen. Het idee van een toekomstige ondergrondse EINSTEIN telescoop is om dit in een driehoeksofstelling te realiseren en daarna met een driehoeksconfiguratie van satellieten (LISA).

Een van de consequenties van kromming van ruimte-tijd is dat een ongestoorde beweging van licht zich manifesteert als een gekromde baan. En net zoals lenzen lichtstralen afbuigen kunnen massa's fungeren als lenzen voor licht. Licht kan zelfs zo sterk afgebogen worden dat het niet meer kan ontsnappen. Voor een massa M staat deze afstand bekend als de Schwarzschild straal R_S ,

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}, \quad (6.1)$$

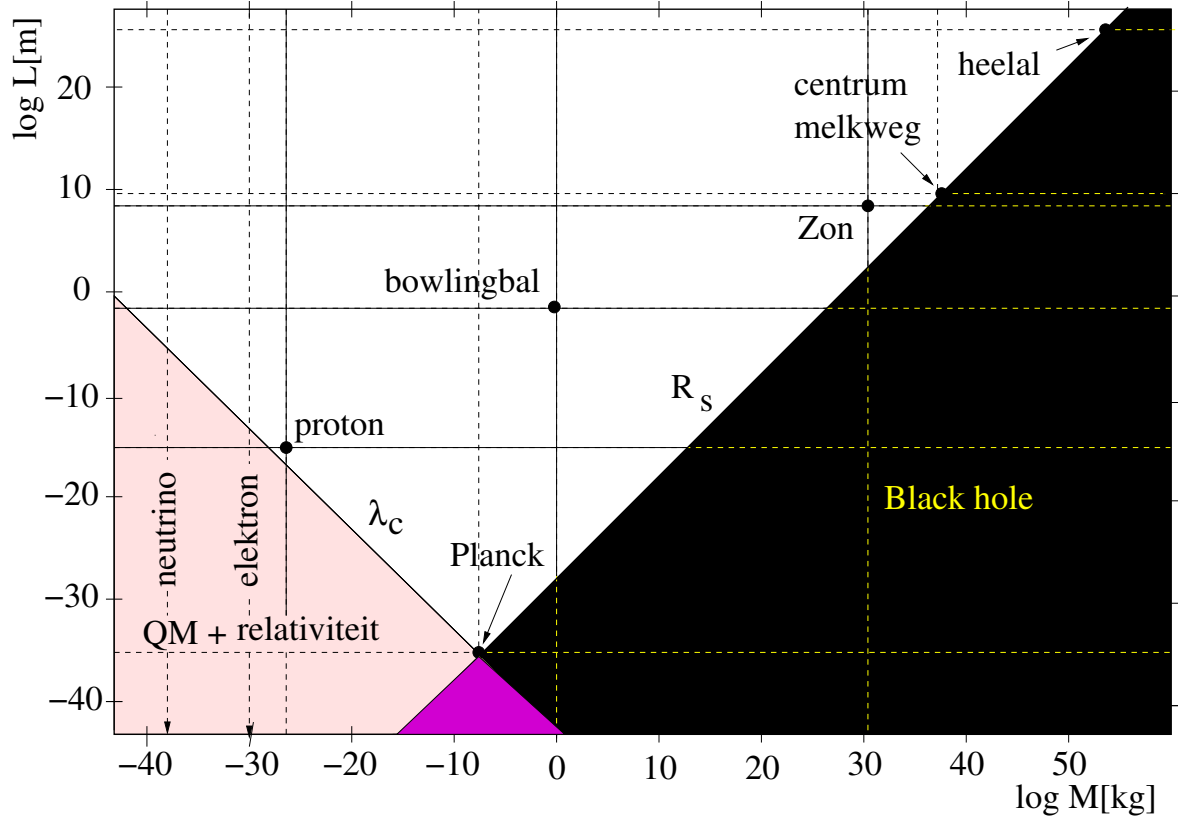
Een object waarvan de afmeting kleiner dan of gelijk is aan de Schwarzschild straal heet een *zwart gat*. In figuur 6.1 is dat het gebied rechtsonder in de figuur. Alles binnen deze straal, ook wel de *event horizon* genoemd, is onzichtbaar. Een deeltje dat van buiten deze straal komt zal op de horizon terechtkomen inclusief alle informatie die het deeltje bevat en onzichtbaar worden van buitenaf.

Maar hoe zit het dan met elektronen die voor zover we nu weten puntdeeltjes zijn. Nog afgezien van het feit dat de Schwarzschildstraal voor een elektron veel kleiner is dan de experimenteel bekende bovengrens voor de elektronstraal, is voor elektronen positie dan al lang geen welbepaalde grootte meer. De daarvoor relevante grens is de Compton golflengte

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{Mc}. \quad (6.2)$$

In figuur 6.1 liggen afmetingen kleiner dan de Compton golflengte horende bij een bepaalde massa in het gebied linksonder. Als je dit soort afstanden kunt onderzoeken vliegen de deeltjes en antideeltjes je om de oren. Een Compton golflengte is dan ook de 'schil' rond een zwart gat, waar sprake is van Hawking straling. Hier worden deeltje-antideeltje paren gecreëerd waarbij het deeltje kan ontsnappen en het antideeltje op of in het zwarte gat terechtkomt. Netto is er dan een deeltje ontsnapt uit het zwarte gat. Op deze manier kunnen zwarte gaten 'verdampen'. De massa en afmeting waar de Schwarzschildstraal en de Compton golflengte samenkomen is de Planck schaal. De Planck massa is gedefinieerd als

$$M_{\text{Pl}} c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}, \quad (6.3)$$



Figuur 6.1: *Zijn elementaire deeltjes zwarte gaten? In de tekst het antwoord. In de figuur is langs de horizontale as de massa is uitgezet en langs de verticale as de afmeting L . Beide schalen zijn logaritmisch. Ook zijn als functie van de massa aangegeven de Compton golflengte λ_C en de Schwarzschildstraal R_S .*

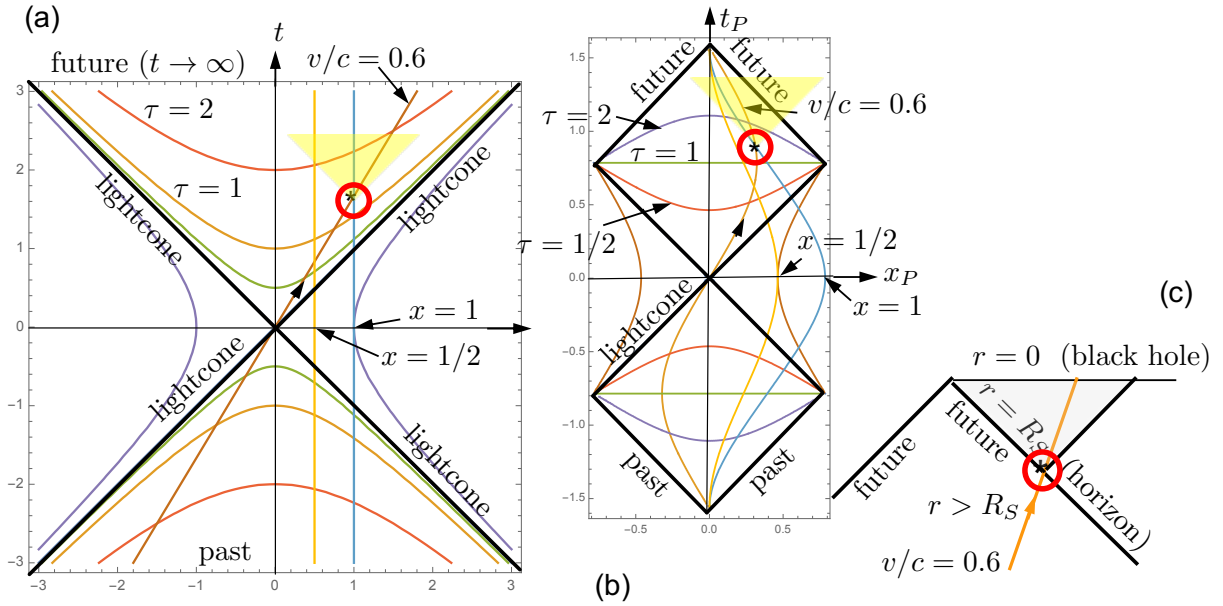
($M_{\text{Pl}} \approx 0,02 \text{ mg}$). De corresponderende Compton golflengte is de Planck lengte,

$$L_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,6 \times 10^{-35} \text{ m.} \quad (6.4)$$

De Schwarzschildstraal van een Planckmassa is dan $R_S = 2 L_{\text{Pl}}$.

6.2 Zwarte gaten

Ter illustratie van de vervorming van ruimte en tijd door massa M (inclusief zwarte gaten of black holes, BH), kunnen we ons voorbeeld van de reis naar een ster in hoofdstuk 3 overdoen voor een reis naar een BH. Vervorming van ruimte en tijd is in eerste instantie beperkt tot effecten die zich manifesteren als de gravitatiepotentiaal. Daarnaast zijn er ‘hogere orde’ effecten als de precessie van de baan en een klein extra tijddilatatie effect. Dramatisch wordt het pas als de massa geconcentreerd is binnen een volume, in het eenvoudigste geval een roterende bol, met straal $R_S = 2GM/c^2$, de Schwarzschild straal, en wel als we in de buurt van die *horizon* komen. Zoals ook evident uit bewegingen van sterren in het centrum van het melkwegstelsel zijn de effecten ver daarbuiten niet zo groot. Het is zelfs mogelijk een stabiele cirkelbaan te hebben tot een afstand van $R_{\text{ISCO}} = 3R_S$, een afstand waarbij de afkorting staat voor *innermost stable circular orbit*. Deze afstand



Figuur 6.2: Diagram (a) is het ruimte-tijd $t - x$ diagram dat we al in hoofdstuk 2 gezien hebben. Hierin zien we de lichtkegel (lightcones) als de asymptoten waar de hyperbolen $\tau^2 = t^2 - x^2$ eindigen. Ook het pad van een reiziger met constante snelheid v/c is aangegeven. De verticale lijnen zijn de positie van objecten met $x = 1/2$ of $x = 1$ parallel bewegend aan $x = 0$. Het is soms handig als oneindig ‘eindig’ gemaakt wordt zoals in het Penrose diagram in (b) met coördinaten $x^\pm = \tan(x_P^\pm)$. De hoekpunten zijn dan de punten waar x (bovenste hoekpunt) of $x^\pm = t \pm x$ (rechter- en linkerhoekpunten) oneindig worden, corresponderend met $t_P = \pi/2$ en $x_P^\pm = \pi/2$ (of $|x_P| = |t_P| = \pi/4$). Het is een zogenaamde conforme afbeelding waarbij een lichtkegel een lichtkegel blijft. Zoals besproken in de tekst gaat voor een zwart gat de horizon op afstand $r = R_S$ van de massa fungeren als een ‘toekomstig oneindige’ diagonaal in een Penrose diagram. Inzoomend op het gebied waar de reiziger een zwarte gat nadert (aangegeven met omcirkelde * in de diagrammen) krijgen we dan diagram (c).

is voor niet-roterende BH's en kan bij rotaties van het BH nog kleiner worden. Fotonen kunnen zich ophopen op afstand $1,5 R_S$, zodat zelfs ‘BH foto's’ mogelijk zijn.

De discussie in hoofdstuk 3 beperkte zich tot een vlakke ruimte met een metriek $c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ of tussen punt (t, x) en $(0, 0)$ de ‘afstand’ $c^2 \tau^2 = c^2 t^2 - x^2$. We gebruikten daarvoor een $t - x$ diagram zoals in diagram 6.2(a). In de figuur is weer een reis met een constante snelheid $v/c = 0.6$ gegeven. Als afstand is nu $x = 1$ genomen (zeg 1 lichtjaar) en de hyperbool $\tau = 1$ correspondeert met eigentijd 1 jaar. Bij een reis heen en weer naar een ster zou de tijd op Aarde $2 \times 5/3$ jaar zijn en voor de reiziger $2 \times 4/3$ jaar. Zonder kromming van ruimte-tijd ten gevolge van massa verandert dit niet en zoals gezegd zelfs met kromming verandert het niet noemenswaard als het einddoel bij het zwarte gat maar ver genoeg van de horizon blijft.

Om dat in te zien schrijven we de uitdrukking voor de afstand tussen 2 punten in de aanwezigheid van massa op, de Schwarzschild metriek

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (6.5)$$

waarbij we ons beperken tot een radiëel symmetrische situatie. Met de dilatatie in gedachten zien we dat als $R_S \ll r$ we in benadering een $\tilde{\gamma} = 1 - R_S/2r$ hebben, vertaald in een gravitatiepotentiaal,

$$E - Mc^2 = Mc^2(\tilde{\gamma} - 1) = -\frac{GM}{r}. \quad (6.6)$$

Dezelfde vergelijking leert dat klokken in het aantrekkende gravitatieveld langzamer lopen.

Om te zien wat er verandert bij zwarte gaten in de buurt van de horizon, is het handig als oneindig ‘eindig’ gemaakt wordt zoals in een Penrose diagram in (b) met coördinaten $x^\pm = \tan(x_P^\pm)$. De hoekpunten zijn dan de punten waar x (bovenste hoekpunt) of $x^\pm = t \pm x$ (rechter- en linkerhoekpunten) oneindig worden, corresponderend met $x_P = \pi/2$ en $x_P^\pm = \pi/2$. Naast het verduidelijken van het verre verleden en de verre toekomst, is een bijkomend voordeel van deze zogenaamde conforme afbeelding dat de lichtkegel een lichtkegel blijft. Afbeeldingen (a) en (b) betreffen beide ruimte-tijd zonder kromming.

In vergelijking 6.5 is duidelijk dat er iets drastisch gebeurt als $r = R_S$. Voor de details moet de lezer toch even een boek over de algemene relativiteitstheorie ter hand nemen. Het komt er op neer dat de BH horizon zich gedraagt als het ‘toekomstige oneindig’, een ‘future’ diagonaal in het Penrose diagram. Inzoomend op dat gebied krijgen we het diagram in (c). De reiziger reist gewoon door, even alle andere effecten achterwege latend zoals getijdenkrachten ten gevolge van de enorme massa waar de horizon bij hoort. De waarnemer buiten de horizon die informatie binnenkrijgt ziet de klok van de reiziger naar het tijdstip van passeren van de horizon kruipen, maar ontvangst van die informatie duurt steeds langer en is uitgestrekt tot in de oneindige toekomst. De informatie over de reiziger wordt onderdeel van de horizon.

Mocht de reiziger voor het passeren toch nog weggelopen, dan kan hij na ontsnapping in nogmaals 4/3 jaar weer terug op Aarde zijn, maar het totale tijdverschil kan nu enorm groot zijn. Ter vergelijking, bij de reis in hoofdstuk 3 veroudert reiziger t.o.v. Aarde gelijk op heen en terugreis onafhankelijk van het oponthoud in de buurt van de ster. Maar vlak bij de horizon heeft de reiziger nu te maken met de vertraagde klok in een enorm sterk gravitatieveld, met extra veroudering tot gevolg.

6.3 De niet-abelse ijktheorieën

Terug naar de andere krachten, die de deeltjeswereld domineren. We hebben in het vorige hoofdstuk geprobeerd de nadruk te leggen op de concepten en alles te vereenvoudigen, iets waar we ook al bij de discussie van ruimte en tijd in het hoofdstuk 2 zijn begonnen. Is dat zinvol als je bij een enkele 0D vrijheidsgraad uitkomt. Inderdaad zolang je onafhankelijke systemen hebt die elkaar op geen enkele manier voelen, is de wereld als een stel ontkoppelde slingers. Die zitten elkaar niet in de weg of zo, sterker nog, ze weten niet eens van elkaars bestaan. Einde verhaal. Maar dat is niet onze wereld, die bestaat uit gekoppelde onderdelen. Maar onze wereld is er wel een waar sommige onderdelen zo goed als ontkoppeld zijn, bijvoorbeeld een atoom of een stoel of de verderop nog ter sprake komende donkere materie in en rond clusters van melkwegstelsels. Donkere materie is relevant omdat duidelijk werd dat die net als onze ‘normale’ materie dezelfde ruimte-tijd kromt. Beide vormen van materie voelen gravitatie, maar de donkere materie is ongevoelig voor elektrozwakke en sterke wisselwerkingen. Op dezelfde manier zijn de neutrinos een

voorbeeld van deeltjes die gravitatie en daarnaast alleen zwakke krachten voelen, maar geen elektromagnetisme of sterke krachten, wat aanleiding geeft tot de ongrijpbaarheid van neutrinos. Aan beide voorbeelden zullen we apart aandacht gaan besteden.

Terug naar ontkoppelde systemen en de basics. Fysici gebruiken graag een vereenvoudigd beeld van de wereld. Een voorbeeld daarvan is de 1+1 dimensionale wereld met tijd en ruimte, in feite de simpelste uitbreiding van een 0D situatie met naast tijd en frequentie gekoppeld aan energie enkel één richting waarvoor golfgetal gekoppeld is aan impuls. Dat is een ruimte die ook de mogelijkheid van complex conjugeren bevat en dus deeltje-antideeltje in zich heeft, al zijn dat in dat geval gewoon rechts- en links-lopers, gekoppeld via massa M . De ladingen worden bij elkaar gehouden omdat flux nergens anders heen kan dan van lading naar tegengestelde lading. De kracht is constant corresponderend met een lineair met de afstand groeiende potentiaal, het lijken wel quarks! In deze wereld is bovendien ook supersymmetrie tussen bosonen en fermionen.

Maar dit lijkt in geen velden of wegen of onze wereld, zal de lezer zeggen. Inderdaad, maar de combinatie van twee 1+1 dimensionale werelden levert ons een wereld waarin allerlei dingen kunnen gebeuren. Het is net als bij de uitbreiding van twee reële ruimtes naar de complexe getallen, waarbij symmetrie via een complexe fase meerwaarde geeft gevolgd door opnieuw een complexificatiestap wat ons de quaternions oplevert, waarin de volgorde van vermenigvuldigen opeens van belang is. Het opent de deur naar een 1+3 dimensionale Minkowski ruimte en een wereld met twee en drievoudige symmetrieën inclusief half-tallige en heel-tallige spins voor fermionen en bosonen, respectievelijk. Die 2- en 3-voudige symmetrieën hangen samen vergelijkbaar met de 2- en 3-voudige discrete symmetrieën in de symmetriegroep A_4 van een tetraëder (gelijkzijdige vierhoek in 3 dimensies) een goede representatie van de *tripartite* ruimte $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. De kwantummechanica van zo'n wereld lijkt sterk op de manier waarop een drie-dimensionale harmonische oscillator is opgebouwd uit drie een-dimensionale oscillatoren, maar dan wel met inachtneming van alle mogelijke complexe fases oftewel als maximale symmetrie de drievoudige unitaire symmetrie $SU(3)$ met inbedding van tweevoudige unitaire symmetrieën $U(2)$ en discrete symmetrieën. Toestanden vormen drie families van deeltjes, met fermionen die passen in kleur tripletten of singletten en in zwakke isospin doubletten of singletten, die elk specifieke lading toegekend krijgen. Startend met een linkshandig triplet $(1, 2, 3)$ en een rechtshandig antitriplet $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3})$ levert precies de toestanden in figuren 5.8 en 5.9 op.

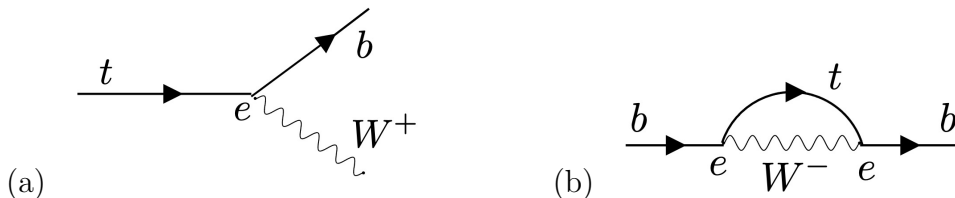
Belangrijk is dat de maximale overkoepelende $SU(3)$ kleursymmetrie ongebroken is en leidt tot kleurloze toestanden (singletten). Dit vereist verstrengelde tripartite chirale lepton toestanden in een reële 3D wereld (GHZ klasse, zie hoofdstuk 5) of gekleurde tripletten van chirale quark en antiquark toestanden (W en $\bar{W}$ klassen) in een 1D wereld, waarbij quarks en $SU(3)$ gluon krachtdeeltjes combineren tot kleurloze hadronen met uitgebreidheid in een 3D wereld. Hoe die opsluiting precies beschreven moet worden is nog een open opgave in het SM model. Tweevoudige symmetrieën zijn gewoon zichtbaar als $SU(2)$ multipletten, met voor de drie mogelijke inbeddingen de continue $SO(3)$ en de discrete A_4 vrijheid van de 3D wereld. De discrete CPT symmetrieën zichtbaar in de 3D wereld vereist dat we proton, neutron en elektron als deeltjes (en niet antideeltjes) beschouwen en elektron als negatief geladen kiezen. De rest ligt dan vast. Maar het vereist nog een heleboel afstemming om de juiste massa's en koppelingen van fermionen en bosonen in de drie families te begrijpen en bijvoorbeeld idem dito om iets 'simpels' als $g - 2$ voor elektron of verschillen in die grootte voor elektron en muon (aangestipt op het einde van hoofdstuk 3) volledig te begrijpen. Over complexiteit nu meer.

6.4 Waar zijn al de zware quarks gebleven?

Terugkomend op de doubletten in het SM, dan is daar allereerst het doublet waar de top quark toe behoort, de quark die met kop en schouders uitsteekt wat massa betreft ($175 \text{ GeV}/c^2$) boven alle andere massa's in het SM. De enige andere deeltjes met noemenswaardige massa zijn dan het Higgs deeltje ($125 \text{ GeV}/c^2$), het Z^0 -boson ($92 \text{ GeV}/c^2$) en de twee $W^\pm$ -bosonen ($82 \text{ GeV}/c^2$). Deze laatste twee zijn ook precies de krachtdeeltjes die doubletten van leptonen en quarks in elkaar overvoeren via absorptie of emissie. De deeltjes in een doublet verschillen dan ook precies één ladingseenheid in de elektrische ladingen. We hebben bijvoorbeeld $e_L^- \rightarrow \nu_{eL} + W^-$ en $d_L \rightarrow u_L + W^-$, maar ook $W^- \rightarrow e_L^- + \bar{\nu}_{eR}$. De combinatie van de laatste twee tot een diagram voor de reactie $d_{sL} \rightarrow u_L + e_L^- + \bar{\nu}_{eR}$ waar het W -deeltje niet als eindtoestand maar slechts als kortlevende tussentoestand optreedt is het basis proces dat we al zagen bij het verval van het neutron (zie figuur 4.15).

Net zoals bij beta-verval de elektrozwakke doubletten in elkaar overgevoerd kunnen worden, in dat geval quarks in het (u, d) doublet kan dat ook bij de andere families, met de top quark als speciaal geval omdat die boven alle andere fermionen uitsteekt met een massa die van dezelfde orde van grootte is als de Higgs massa en de massa van de elektrozwakke krachtdeeltjes. Deze zwaarste (top) quark vervalst via $t \rightarrow b + W^-$ naar de lichtere (bottom) quark (zie fig. 6.3(a)). Terug kan niet vanwege energiebehoud. De leeftijd voor het verval klopt ook perfect met de berekening en is voor de top quark $0,5 \times 10^{-24} \text{ s}$. Vergeleken daarbij is de bottom quark met een leeftijd van zo'n $1,5 \times 10^{-12} \text{ s}$ eigenlijk stabiel. De verhoudingen zijn hetzelfde als 1 s voor de top quark tegen 100 000 jaar voor de bottom quark. We komen hieronder terug op de leeftijd van de bottom quark, maar merken allereerst op dat zelfs al kan $b \rightarrow t + W^-$ niet als verval, wel kan $t + W^-$ als tussentoestand voorkomen in een diagram als in figuur 6.3(b). Omdat de zware top quark links- en rechtshandig koppelt, geeft dit aanleiding tot een koppeling tussen links- en rechts-handige b quarks en dus een massa voor de b -quark. Op deze manier zou beginnend met een nulde-orde massaloze b -quark, een massieve b -quark met massa van zo'n $5 \text{ GeV}/c^2$ gegenereerd kunnen worden. Maar in een precieze berekening komen natuurlijk nog heel wat meer diagrammen voor die allemaal samen het eindresultaat moeten geven.

Maar nu blijft de vraag waarom de bottom quark niet echt stabiel is en toch vervalst. Daar speelt *menging van generaties*, een subtiliteit van de kwantummechanica, een hoofdrol. In de kwantummechanica zijn superposities van toestanden mogelijk. Dat geldt ook binnen een segment van de Hilbert ruimte zoals de linkshandige quarks met lading



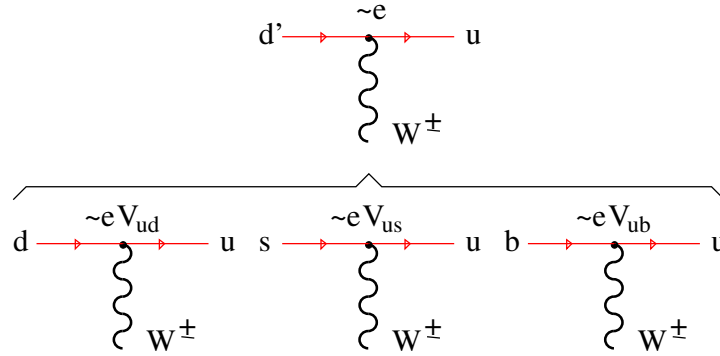
Figuur 6.3: Diagram (a) is de belangrijkste bijdrage in het verval van de top quark. Het W -boson koppelt aan het doublet (t, b) . Het verval is mogelijk omdat er naast behoud van lading voldaan kan worden aan alle behoudswetten zoals behoud van energie, impuls en impulsmoment. Omdat de topquark massief is en de rechts- en links-handige componenten koppelt, is er ook een hogere orde bijdrage die links- en rechts-handige componenten van de b -quark koppelt, geïllustreerd in diagram (b), en die dus bijdraagt aan de b -quark massa.

Menging van generaties

In de doubletten waarin de linkshandige componenten van de quarks gerangschikt worden komen specifieke lineaire combinaties van de quarks voor, namelijk de d' -, s' - en b' -quarks. Dit zijn kwantummechanische combinaties van de d -, s - en b -quarks,

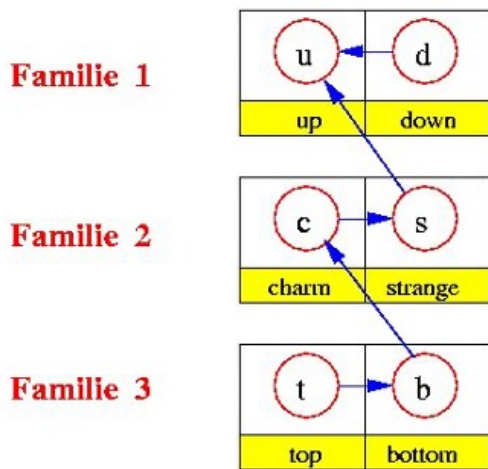
$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \text{ of } \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{cd} & V_{td}^* \\ V_{us} & V_{cs} & V_{ts} \\ V_{ub}^* & V_{cb} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}.$$

Dit heeft als consequentie dat de koppeling van bijvoorbeeld een u -quark aan een d' -quark, drie mogelijkheden in zich bergt, namelijk de koppelingen van de u -quark aan d , s en b -quark, met verschillende sterktes evenredig met de getallen in de ‘mengmatrix’. Kwantummechanisch kunnen dit bovendien complexe getallen zijn, al moet de matrix wel aan bepaalde voorwaarden voldoen, die garanderen dat er bij overgangen uiteindelijk geen quarks verloren gaan (unitariteit).



De elementen in de linkerbovenhoek van de matrix kunnen bij benadering als $V_{ud} = V_{cs} = \cos \theta_C \approx 0,974$ en $V_{us} = -V_{cd} = \sin \theta_C \approx 0,227$ geschreven worden waar $\theta_C \approx 13$ graden bekend staat als de Cabibbo menghoek. Terwijl $V_{tb} \approx 1$, zijn de andere componenten veel kleiner met $V_{ub} \sim V_{td} \sim 0,01$ en $V_{cb} \sim V_{ts} \sim 0,04$. Het is mogelijk om de keuze te maken dat enkel de elementen V_{ub} en V_{td} een complexe fase hebben.

–1/3. Superpositie is daar mogelijk omdat vanwege de 3-voudige symmetrie het patroon in fig. 5.9 zich driemaal herhaalt en er drie generaties van leptonen en quarks bestaan. We hebben dus het segment van de Hilbert ruimte met drie basistoestanden, d_L , s_L en b_L (de linkshandige down, strange en bottom quarks). In principe hoeven de *massatoestanden* die de linkshandige quarks koppelen aan de corresponderende rechtshandige quarks echter niet dezelfde te zijn als de *elektrozwakke* toestanden die koppelen aan de corresponderende linkshandige quarks met lading $+2/3$ in de elektrozwakke doubletten (u_L, d'_L), (c_L, s'_L) en (t_L, b'_L). Maar het is wel dezelfde Hilbert ruimte, wat betekent dat de twee sets toestanden als lineaire combinaties van elkaar geschreven kunnen worden (zie kader over menging van generaties). Ook al blijkt uiteindelijk de menging voor zware quarks erg klein ($V_{cb} \ll V_{tb}$), het feit dat $V_{cb} \neq 0$ betekent dat de toestand s'_L een stukje b_L bevat (en omgekeerd). Dat is voldoende om via de s'_L toestand de koppeling $b \rightarrow c + W^-$ mogelijk te maken en daarmee het verval van deeltjes met b -quarks naar deeltjes met lichtere quarks te begrijpen. Op dezelfde manier is het verval van andere quarks mogelijk (zie figuur 6.4), in de meeste gevallen met quarks opgesloten in baryonen of mesonen en de W -bosonen



Figuur 6.4: Het verval van zwaardere naar lichtere quarks na emissie van $W^\pm$ bosonen. De top quark ($t \rightarrow b + W^+$) heeft een leeftijd van $0,5 \times 10^{-24}$ s. Hier wordt echt een W^+ geproduceerd, die zelf maar een leeftijd heeft van $0,3 \times 10^{-24}$ s. De in eerste instantie geproduceerde b'_L toestand is praktisch identiek aan b_L en hier speelt menging geen rol van betekenis. Maar voor het verval van de b-quark is die menging essentieel. De b-quark heeft een fractie s' in zich die het verval naar $b \rightarrow c + e^- + \bar{\nu}$ mogelijk maakt met leeftijd $1,5 \times 10^{-12}$ s. De charm c-quark of beter de D-mesonen met deze quark vervallen naar deeltjes met een vreemde quark na zo'n 10^{-12} s.

als intermediaire toestand net als bij het verval van de d-quark (zie fig. 4.15). Dat wil overigens niet zeggen dat we de oorsprong van de menging van de generaties begrijpen!

6.5 De zware en lichte krachtdeeltjes

De symmetrie tussen krachtdeeltjes zit in het feit dat er maar één koppelingconstante is die de sterkte van de krachten bepaalt. Aantallen krachtdeeltjes hangt af van de symmetrie. Voor een enkele fasedraaiing, een U(1) symmetrie is er één elektrische lading en één krachtdeeltje, het foton. Met een 3-voudige SU(3) symmetrie (na eliminatie van een irrelevante overall U(1) fase), zijn er drie kleurladingen en $3 \times 3 - 1 = 8$ gluonen. Voor deze 3-voudige symmetrie wordt de koppeling van gekleurde quarks aan gluonen beschreven met 3×3 matrices (de 8 Gell-Mann matrices). Het zijn de getalletjes in die matrices die ons vertellen hoe de specifieke quark-quark-gluon koppelingen van kleuren afhangen met een overkoepelende sterkte. Dat is de kwantumchromodynamica (QCD), de niet-abelse ijktheorie, waarbij de 3-voudige symmetrie ingebakken zit, zelfs zodanig dat kleuren (r, g, b) en de richtingen (x, y, z) ononderscheidbaar zijn, de eigenschap van een ijktheorie. De U(1) en SU(3) symmetrieën zijn ongebroken symmetrieën met corresponderende massaloze krachtdeeltjes. Het Higgs deeltje koppelt de chiraliteitstoestanden (links en rechts), de krachtdeeltjes zorgen voor de onderlinge koppelingen van de andere vrijheidsgraden (lading of kleur) van rechtse (of linkse) chirale toestanden.

Met symmetrie als uitgangspunt in een tripartite kwantumruimte is de maximale SU(3) symmetrie onzichtbaar, dat wil zeggen dat de toestanden of kleurloos zijn (zoals de leptonen als GHZ toestanden) of dat ze kleurloze combinaties vormen (zoals de quarks als W toestanden) waarbij de quarks gebruikmaken van de vrijheid om chirale R en L toestanden te recombineren tot impulstoestanden. Consequentie is dat kleuren van quarks en gluonen niet als eigenschappen van fysische deeltjes (met zowel kleur als energie en impuls) zichtbaar zijn. Bijvoorbeeld van de quarks die in diep-inelastische verstrooiingsexperimenten 'gezien' worden omdat de energie en impuls van een uitgewisseld foton wordt overdragen aan één (geladen) quark, kunnen we niet de kleur van die quark 'zien'. In de eindtoestand zien we dat de hoog-energetische 'quark' aanleiding geeft tot een jet van baryonen

en mesonen en antideeltjes. De structuur met een drietal quarkkleuren en met specifieke massa's, elektrozwakke ladingen is echter onmiskenbaar. Maar in onze drie-dimensionale ruimte is er geen kleur, we zien alleen kleurloze elementaire deeltjes (leptonen) of kleurloze uit (elementaire) quarks en anti-quarks samengestelde deeltjes, de baryonen en mesonen, die op hun beurt weer bouwstenen zijn voor atoomkernen, enz. De gekleurde quarks en anti-quarks leven in wezen in een 1-dimensionale wereld. Of en hoe het volledige mechanisme van QCD in de taal van de 3-dimensionale wereld beschreven zou moeten worden blijft een intrigerende vraag.

Voor de in de tripartite ruimte ingebedde $U(2)$ symmetrie is meer mogelijk. Alle toestanden (quarks en leptonen) kunnen ondergebracht worden in multipletten van deze symmetrie (toestanden met zwakke isospin en hyperlading). Vanwege de drievoudige vrijheid voor de $U(2)$ inbedding zijn er allerlei mogelijkheden voor de $U(2)$ elektrozwakke symmetrie. In sectie 5.6 is beschreven hoe we vanuit een beginsituatie met vier Higgs velden en vier massaloze krachtdeeltjes (zie fig. 5.5) via spontane symmetriebreking komen tot een Higgs veld, drie massieve en een massaloos krachtdeeltje. In deze wereld van leptonen, elektrozwakke krachtdeeltjes en Higgs deeltje blijven naast $U(2)$ inbedding ook reële rotaties als ongebroken symmetrie over. Dat betekent dat deze deeltjes in een 3D wereld leven. De symmetriebreking zorgt voor een ordening van de symmetrieën rondom een uitverkoren richting als bij een vallende verticale staaf. Die uitverkoren richting van alle mogelijke elementaire boson velden definieert het scalaire Higgs veld dat naast excitaties ook een klassieke waarde heeft, de zogenaamde *vacuum verwachtingswaarde*. In 1D zouden we die waarde het getal 1 noemen, in 3D correspondeert het met een massa van ongeveer $250 \text{ GeV}/c^2$. Het Higgs deeltje met massa $M_{\text{Higgs}}c^2 \approx 125 \text{ GeV}$ is dan de laagste excitatie rondom de uitverkoren symmetrierichting. Het proces van deze *spontane symmetriebreking* zorgt dat er niet alleen voor dat we te maken krijgen met massieve krachtdeeltjes. De W -bosonen, (W^+ , W^0 , W^-), en het B^0 boson recombineren hierbij ook tot een massaloos foton (γ) en drie massieve krachtdeeltjes (W^+ , W^- en Z^0) zoals ook al besproken in het vorige hoofdstuk. Deze krachtdeeltjes hebben massa's vergelijkbaar met het Higgs deeltje. De $U(1)$ symmetrie horende bij het foton is ook links-rechts symmetrisch, in tegenstelling tot het $SU(2)$ stuk wat een links-rechts symmetrie gecombineerd met deeltje-antideeltje symmetrie heeft. De breking van de 2-voudige symmetrie en de spontane symmetriebreking betekent uiteindelijk dat er voor de leptonen en de kleurloze hadronen, baryonen en mesonen unieke elektrozwakke ladingen zijn.

De spontane symmetriebreking is een procédé waar een duidelijk principe aan ten grondslag ligt en dat deels ook in verhoudingen tussen koppelingen en massa's van krachtdeeltjes terug te zien is. Weliswaar is de precieze menging van krachtdeeltjes en de menging tussen generaties van quarks ingewikkeld en nog volop in onderzoek. Maar gegeven de menghoek θ_W voor foton en Z^0 -deeltje hebben we wel de relatie $M_W/M_Z = \cos \theta_W$. Menging van generaties is in het theoretische raamwerk in te bouwen, oftewel het is toegestaan, maar het geeft toch een onbevredigend gevoel. We willen graag de correcties uitrekenen op dezelfde manier als het anomaal magnetisch moment $g - 2$ voor de leptonen. Fysici zoeken ook naar verklaringen door te zoeken naar minimale uitbreidingen van het standaardmodel, zoals het matchen van alle singletten met extra doubletten en omgekeerd of het matchen van alle fermionen met bosonen en omgekeerd, bekend als supersymmetrie. Liefst bouwen ze dan alles in in een overkoepelende grotere symmetrie zoals $SU(5)$ besproken in het vorige hoofdstuk. Of een raamwerk met verwoven $S(U(2) \times U(3))$ voldoende is blijft voor nu ook een vraag.

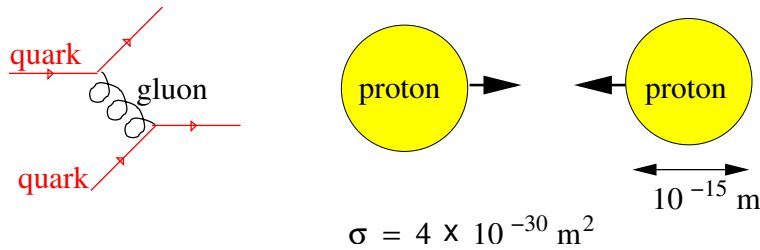
6.6 De relatieve sterkte van de krachten

Behalve berekening van overgangswaarschijnlijkheden tussen quarks met verschillende smaken kunnen ook botsingswaarschijnlijkheden worden berekend ten gevolge van de uitwisseling van deeltjes en daaruit ook weer de kracht of potentiaal tussen deeltjes. Diverse voorbeelden van zulke potentialen hebben we al genoemd in het voorgaande hoofdstuk. Zo is de elektrische potentiaal tussen twee geladen deeltjes direct te berekenen uit de uitwisseling van één foton. Het bereik van een potentiaal wordt bepaald door de massa van het uitgewisselde deeltje, om precies te zijn door de Compton golflengte $\lambda = \hbar/mc$. De Coulomb potentiaal waarvan de waarde omgekeerd evenredig is met de afstand ($1/r$ gedrag) heeft in principe een oneindig bereik, corresponderend met de uitwisseling van een massaloos foton. Ook voor gravitatie gedraagt de potentiaal zich omgekeerd evenredig met de afstand en het graviton is naar verwachting dus ook massaloos. Gluonen zijn weliswaar ook massaloos, maar daar is de sterkte van de wisselwerking zo groot ($g_s \approx 1$) dat de uitwisseling van meer dan een gluon net zo waarschijnlijk is. Dat leidt tot de opsluitende term (evenredig met r) in de potentiaal tussen quarks. Dit is overigens nog niet analytisch bewezen, maar blijkt uit grootschalige computerberekeningen, waarbij de ruimte-tijd wordt opgedeeld in een rooster. In de berekeningen kunnen de quarks zich alleen op de hoekpunten van het rooster bevinden, terwijl de gluonen zich op de verbindingen tussen deze punten bevinden.

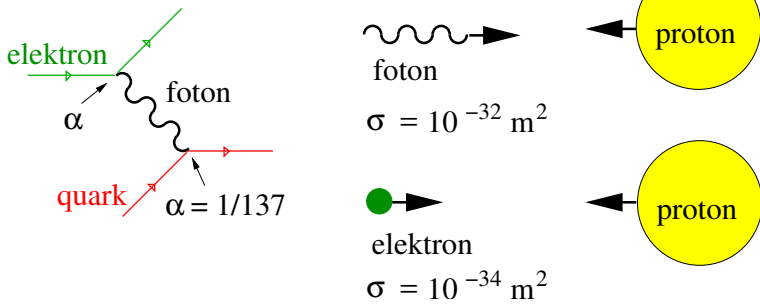
Ook als de uitgewisselde deeltjes zelf weer samengesteld zijn, zoals pionen die als kleurloze quark-antiquark druppels tussen twee nucleonen worden uitgewisseld, wordt het bereik bepaald door de Compton golflengte. Voor pionen is dat $\lambda_\pi = \hbar/m_\pi c \approx 1,4$ fm, de afstand die we als de dracht van de kernkracht zijn tegengekomen in hoofdstuk 4. Omdat de uitgewisselde deeltjes bij de zwakke wisselwerkingen zo zwaar zijn hebben die een uitermate korte dracht. Voor een W -deeltje met een massa van 80 GeV is de Compton golflengte ongeveer 0,002 fm, dus veel kleiner dan de afmeting van een proton.

De sterkte van de wisselwerking komt ook heel duidelijk tot uiting in de botsingswaarschijnlijkheden. Beginnen we met de sterke wisselwerkingen met op het niveau van de quarks een sterkte $g_s \approx 1$. Dit betekent dat quarks die elkaar tegenkomen ook verstrooid worden. Aangezien we geen verstrooiingsexperimenten met quarks kunnen doen, kunnen we bijvoorbeeld kijken naar de verstrooiing van twee protonen. De metingen kunnen vertaald worden in een effectieve oppervlakte waarmee het ene proton het andere ‘ziet’. Deze oppervlakte heet de *werkzame doorsnede* en wordt aangegeven met σ . Voor protonen zal die effectieve oppervlakte dus zo ongeveer gelijk zijn aan de dwarsdoorsnede of zelfs iets groter omdat beide protonen een afmeting hebben, dus we verwachten iets tussen πR^2 en $4\pi R^2$. Voor een proton met een straal $R \approx 0,8$ fm (en dus $\pi R^2 = 2$ fm²) blijkt dat inderdaad goed te kloppen. De gemeten waarde voor de werkzame doorsnede is $\sigma \approx 4$ fm² = 4×10^{-30} m², geïllustreerd in figuur 6.5

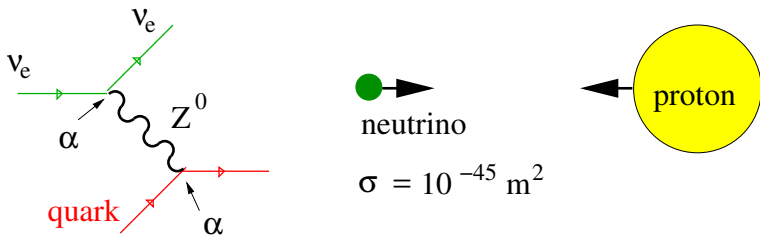
De invloed van de sterkte van de wisselwerkingen wordt heel goed geïllustreerd in de werkzame doorsnedes voor elektromagnetische processen waarbij een foton botst met een proton of waarbij zoals in de botsing van een elektron met een proton een foton wordt uitgewisseld. Iedere koppeling geeft een factor e , die in de botsingswaarschijnlijkheden in het kwadraat voorkomt. In de botsing van een foton met een proton hebben we daarom een werkzame doorsnede die typisch een factor $\alpha \approx 1/137$ kleiner is dan de ‘echte’ dwarsdoorsnede en in de botsing van een elektron met een proton typisch nog eens zo’n factor (zie figuur 6.6). Dat komt uitstekend overeen met de experimenteel gemeten kansen voor



Figuur 6.5: De werkzame doorsnede voor proton-proton verstrooiing (sterke kracht) correspondeert met de dwarsdoorsnede van de deeltjes



Figuur 6.6: De werkzame doorsnede voor foton-proton en elektron-proton verstrooiing (via elektromagnetische kracht) is veel kleiner dan de dwarsdoorsnede van deeltjes vanwege de zwakke koppeling, $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c \approx 1/137$



Figuur 6.7: De werkzame doorsnede voor neutrino-proton verstrooiing (zwakke kracht) is nog kleiner dan in het geval van de elektromagnetische kracht. De uitwisseling van een zwaar deeltje geeft een onderdrukking van de orde van grootte van $m_\pi^4/m_Z^4 \approx 10^{-11}$.

deze verstrooiingsprocessen.

Tenslotte blijkt er dan ook nog de invloed van de dracht van de kracht te zijn. De dracht of reikwijdte van de kracht wordt bepaald door de Compton golflengte die omgekeerd evenredig is met de massa van het uitgewisselde deeltje. Het effect blijkt met de vierde macht van de massa te gaan. In het geval van het neutrino, waarbij een zwaar deeltje wordt uitgewisseld, geeft dat vergeleken met de elektromagnetische botsingen voor de werkzame doorsnede nog eens een extra onderdrukking van $m_\pi^4/m_Z^4 \sim 10^{-11}$ (zie figuur 6.7). De extreem kleine werkzame doorsnede voor neutrinos vertaalt zich in een enorme botsings- en absorptielengte, die voor neutrinos afhankelijk van hun energie gemakkelijk groter kan zijn dan de afmeting van de Aarde (zie kader over botsingslengte).

Botsings- en absorptielengte

Hoe groter de werkzame doorsnede, des te groter de waarschijnlijkheid dat een deeltje dat zich door materie beweegt een botsing ondervindt waarbij het deeltje wordt verstrooid (bijvoorbeeld $e + p \rightarrow e + p$) of geabsorbeerd (bijvoorbeeld $\gamma + p \rightarrow \Delta \rightarrow n + \pi$). De lengte L die in materie of in een gas nodig is om voldoende botsingen te hebben wordt naast de botsingswaarschijnlijkheid vanzelfsprekend ook bepaald door het aantal deeltjes dat het bewegende deeltje tegenkomt. De weglengte in de materie die nodig

Botsings- en absorptielengte (vervolg)

is om er voor te zorgen dat de werkzame doorsnede, de oppervlakte die het bewegende deeltje ziet, de gehele dwarsdoorsnede voor zo'n deeltje vult is gemakkelijk te berekenen. Als we in een blok materie n deeltjes per m^3 hebben die elk σ bijdragen aan de werkzame doorsnede, dan 'ziet' een bewegend deeltje in die 1 m^3 materie met oppervlakte 1 m^2 een werkzame doorsnede $n\sigma$. Dat wil zeggen dat een lengte

$$L = \frac{1}{n\sigma}$$

Bij absorptie van deeltjes wordt dit de absorptielengte genoemd; het correspondeert precies met de lengte die voorkomt in de vergelijking die de exponentiële afval van de intensiteit met de afstand beschrijft,

$$I(x) = I(0) e^{-x/L}.$$

Laten we als voorbeeld de dichtheid van water nemen, 1 g/cm^3 , d.w.z. $N_{\text{av}} = 6 \times 10^{23}$ nucleonen per cm^3 oftewel $n = 6 \times 10^{29}$ nucleonen/ m^3 . Voor fotonen vinden we dan een absorptielengte van ruim 100 m in water, en (met een dichtheid van $\rho_{\text{lucht}} \approx 0,0013 \rho_{\text{water}}$) vinden we een absorptielengte van zo'n 100 km in lucht. Aan dit laatste voorbeeld zien we inderdaad mooi dat de lucht in principe transparant is. Maar zoals we weten hangt dat wel sterk van de golflengte van het licht af. De werkzame doorsnedes en daarmee ook absorptielengtes zijn in het algemeen afhankelijk van de energieën van de botsende deeltjes.

Een tweede voorbeeld is de botsingslengte voor neutrino's. De werkzame doorsnede is in dit geval weliswaar ook sterk afhankelijk van de energie (ruwweg evenredig daarmee), maar een werkzame doorsnede van 10^{-45} m^2 bij een dichtheid van 1 g/cm^3 betekent een botsingslengte van meer dan een biljard km, bijna een lichtjaar. Voor neutrino's afkomstig van de Zon, is de werkzame doorsnede over het algemeen nog kleiner en de botsingslengte dus nog groter. De meeste neutrino's die in het centrum van de Zon (met een straal van ruim 1 miljoen km) worden geproduceerd vliegen er dan ook ongehinderd uit.

6.7 De breking van discrete symmetrieën

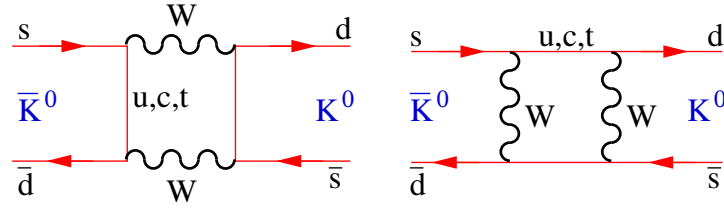
Bij de zwakke wisselwerkingen hebben we gezien dat pariteit geschonden is. Naast de spiegelsymmetrie of (pariteit P) is er ook wat aan de hand met de deeltje-antideeltje symmetrie (conjugatie C). Het neutrino is alleen linkshandig en vormt een doublet met het linkshandige elektron, terwijl het anti-neutrino alleen rechtshandig is en een doublet vormt met het rechtshandige positron. Dus ook de deeltje-antideeltje symmetrie is volledig geschonden. Met de gecombineerde symmetrie lijkt op het eerste gezicht niets aan de hand. Dat zou mooi zijn, want samen met een derde discrete symmetrie, tijdsomkeer (T) gaat de wereld in zichzelf over, zoals we al eerder zagen. Deze fundamentele CPT-symmetrie is een eigenschap van praktisch alle veldentheorieën, en ligt ten grondslag aan het feit dat deeltjes en antideeltjes, elementair of samengesteld, identieke of juist volledig complementaire eigenschappen hebben, identieke massa en identieke leeftijd, maar bijvoorbeeld tegengestelde lading.

Zoals we al gezien hebben wordt de spiegelsymmetrie of links-rechts symmetrie wat

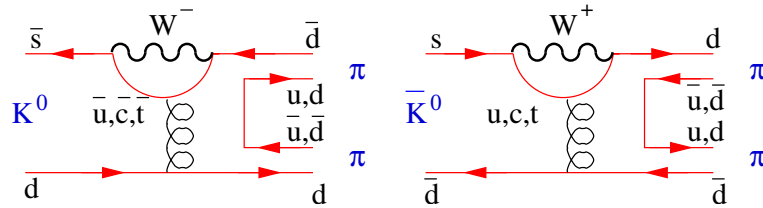
subtieler op subatomair niveau. De symmetrie is er in sommige gevallen niet meer. Werkt het nog prima voor quarks en elektronen (zie bijvoorbeeld plaatje op voorpagina), wanneer we te maken krijgen met de zwakke kracht gaat het helemaal mis. Dat hebben we al gezien bij de opbouw van de materie. De quarks en leptonen komen in twee mogelijke chiraliteiten, behalve het neutrino dat slechts linkshandig voorkomt. Het ontbreken van het ‘spiegelbeeld’ (zie figuur 4.8) duidt op de *breking* van de spiegelsymmetrie, ook wel *pariteitsschending van de zwakke wisselwerkingen* genoemd.

Maar laten we eens kijken naar mesonen opgebouwd uit een quark en een antiquark. Bijvoorbeeld het K^0 -meson is opgebouwd uit een d-quark en een anti s-quark, $K^0 = d\bar{s}$. Het corresponderende antideeltje is $\bar{K}^0 = \bar{d}s$. Beide zijn neutrale deeltjes. Maar de echte wereld bleek niet zo eenvoudig. Er zijn wel twee neutrale mesonen die in aanmerking komen, maar ze leven niet even lang en ook hun massa’s zijn ietsje verschillend. Dus het kunnen niet zomaar elkaars antideeltjes zijn vanwege CPT-symmetrie. Maar daar is wel een mouw aan te passen. Een mogelijke oplossing is dat de twee neutrale deeltjes in de natuur niet de K^0 en $\bar{K}^0$ toestanden zijn, maar (wat kwantummechanisch heel normaal is) superposities hiervan namelijk $K_1^0 = (K^0 - \bar{K}^0)/\sqrt{2}$ en $K_2^0 = (K^0 + \bar{K}^0)/\sqrt{2}$. Zoiets kan als de K^0 in een $\bar{K}^0$ kan veranderen en dat kan (zie figuur 6.8) al is er uitwisseling van twee zwakke krachtdeeltjes voor nodig, dus het is een miniscuul effect en het massa-verschil tussen de toestanden is ook erg klein. Deze twee combinaties K_1^0 en K_2^0 gaan niet langer in elkaar over als we deeltje door antideeltje vervangen, maar ze gaan met een plusteken of een minteken in zichzelf over al moeten we daar zowel een deeltje-antideeltje transformatie als een ruimtespiegeling (CP) toepassen. De toestanden zijn dan *even* of *oneven* onder CP. Ze vervallen doordat de $\bar{s}$ -quark in een $\bar{u}$ -quark (of in een $\bar{c}$ - of $\bar{t}$ -quark, zie figuur 6.9) verandert en een zwak krachtdeeltje (W^-). Na verstrooiing met de andere quark kan die anti-quark vervolgens het W -deeltje weer absorberen en in een $\bar{d}$ -quark overgaan. De vrijkomende energie kan gebruikt worden om een extra quark-antiquark paar te creëren en voilà daar hebben we twee pionen. Voor de s-quark in het $\bar{K}^0$ krijgen we een soortgelijk verval. Er is in deze processen zelfs nog net voldoende energie om nog een paar te creëren en zo kunnen er ook drie pionen uitkomen. Maar de CP symmetrie kan ook gebruikt worden voor samengestelde deeltjes. Dan blijkt dat systemen met twee of drie pionen onder toepassing van CP ook in zichzelf overgaan en ook met een verschil in teken. Volgens de bij CP-symmetrie behorende behoudswetten, kan het K_1^0 -deeltje dan alleen vervallen in twee pionen, $K_1^0 \rightarrow \pi\pi$, terwijl het K_2^0 -deeltje alleen kan vervallen in drie pionen, tenminste *als de gecombineerde CP-symmetrie een goede symmetrie is*. Aangezien vervallen in twee pionen gemakkelijker gaat dan in drie (daar is de energie voor een extra creatie van quark-antiquark voor nodig) zal het K_1^0 -deeltje veel korter leven dan het K_2^0 -deeltje.

Dit mooie schema blijkt echter ook niet helemaal te kloppen zoals al in 1964 werd ontdekt. Het langstlevende deeltje bleek niet precies de K_2^0 -toestand te zijn, maar ook een klein beetje K_1^0 in zich te hebben en kan daarom af en toe ook in twee pionen vervallen. Bovendien bleek ook de K_2^0 -toestand naar twee pionen te kunnen vervallen. Het intrigerende is dat dit terug te voeren is op de menging die optreedt tussen de drie generaties van quarks. Het feit dat de getalletjes die de menging van de drie generaties beschrijven (V_{ud} , etc.) complex kunnen zijn heeft tot gevolg dat de uit de diagrammen in figuur 6.8 berekende som van bijdragen voor de antiquarks uit elk der generaties ($\bar{u}$, $\bar{c}$ en $\bar{t}$) in $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$ niet exact gelijk is aan de bijdrage van de quarks (u , c en t) in $\bar{K}^0 \rightarrow K^0$,



Figuur 6.8: De overgang van K^0 naar $\bar{K}^0$ is een gevolg van de menging tussen verschillende quark generaties. In de tussentoestand kunnen quarks uit alle drie generaties voorkomen.



Figuur 6.9: Het verval van K^0 of $\bar{K}^0$ naar twee pionen. Bij dit verval kunnen er in de tussentoestand deeltjes uit alle drie de generaties voorkomen.

maar daarvoor is dan wel het samenspel tussen *alledrie* de generaties van quarks nodig. Voor mesonen die b -quarks bevatten zou het effect sterker moeten zijn, wat ook bevestigd is in experimenten bij de LHC-versneller in CERN.

Maar ook in het vroege heelal heeft het CP-schendende effect zijn sporen nagelaten. Zonder dit effect zou er evenveel materie als antimaterie in het heelal moeten zijn en dat lijkt niet in overeenstemming met waarnemingen, maar daar komen we in een later hoofdstuk op terug.

Het Higgs veld en het mysterie van massa

We hebben al uitgelegd hoe linkshandige en rechtshandige toestanden wat wisselwerkingen betreft ontkoppelen in het standaardmodel, terwijl het juist massa is wat deze toestanden koppelt tot een enkel massief deeltje. De prachtige symmetrie van het standaardmodel die hierboven geschetst is, is op schalen beneden de 100 GeV, d.w.z. afstanden groter dan 10^{-17} m niet meer aanwezig. Wiskundig krijgen we de symmetrie als we ‘massa’ gewoon even zouden afzetten, voor theoretici onder de natuurkundigen niet meer dan een standaardmanier van werken. Het mooie van het standaardmodel is dat je maar één ingrediënt nodig hebt om de massa en de breking van de symmetrie terug te krijgen, namelijk het Higgs veld. Het Higgs veld is een veld dat zelf ook een aantal ladingen draagt als interne vrijheidsgraden. De structuur van het Higgsveld is vergelijkbaar met de perfect egale bol waarvan de punten op het oppervlak ononderscheidbaar zijn. In onze wereld is deze vrijheid echter niet meer aanwezig. In het afkoelende heelal na de oerknal (zie hoofdstuk 8) is het veld als het ware opeens vastgeklit in een bepaalde configuratie, de grondtoestand. Dit definieert dan in de theorie het vacuüm, de lege ruimte. Bij het beeld van de gladde bol correspondeert dat met een referentiepunt op het egale oppervlak. Dat maakt het mogelijk om structuur op de bol te onderscheiden. Net zoals één punt

op een bol gebruikt kan worden om breedtegraden te onderscheiden, is het vastlopen van het Higgs veld verantwoordelijk voor het onderscheid dat we kunnen maken tussen elektromagnetische en zwakke krachten. Net zoals bij het punt op de bol lengtegraden nog steeds ononderscheidbaar blijven (daar is nog een tweede keuze voor nodig), zo ook blijft er in de Higgs configuratie symmetrie over, bijvoorbeeld de 2 ladingsvarianten van de zwakke krachtdeeltjes ($W^\pm$) zijn exact even zwaar. Over de precieze aard van het Higgs veld willen we via experimenten met de Large Hadron Collider bij CERN meer te weten komen. Het feit dat er een Higgs deeltje bestaat laat zien dat er net als bij andere velden kwanta horen die we met een deeltje kunnen identificeren. Op elementair niveau is dit het eerste deeltje zonder spin. Een van de zaken waar het Higgs veld een essentiële rol speelt is bij het genereren van massa van deeltjes. Massa's zijn niets anders dan manifestatie van de mate waarin deeltjes koppelen aan het Higgs veld. Voor het vastlopen (kort na de oerknal) konden quarks en leptonen ongehinderd (dat wil zeggen met de lichtsnelheid) bewegen, d.w.z. ze waren massaloos. In ons huidige heelal hindert de vacuümconfiguratie de quarks en leptonen, wat betekent dat ze, net als drie van de vier krachtdeeltjes, massa hebben. Over regelmaat in deze massa's voor de verschillende generaties tasten we nog in het duister.

...en gravitatie dan?

Tot slot kan men zich afvragen hoe gravitatie hier bij past. We hebben al gezien dat de kwantumwereld en gravitatie uiteindelijk met elkaar moeten leven op schalen waarbij zowel de Schwarzschildstraal als de Compton golflengte belangrijk zijn. De desbetreffende afstand, de Plancklengte, $L_{\text{Pl}} = 1,6 \times 10^{-35}$ m, ligt overigens nog wel 4 ordes van grootte verder weg dan de unificatieschaal voor de andere krachten. Op deze afstanden moeten we dan naast het feit dat alle krachten ongeveer even sterk zijn ook nog eens de kwantummechanica combineren met de algemene relativiteitstheorie, maar het is nog maar helemaal de vraag of deze concepten dan in ongewijzigde vorm blijven werken. Consistentie en inpassing van de ons bekende wereld lijkt op schier oneindig veel manieren mogelijk, maar vereist mogelijk wel een geheel nieuwe kijk op ruimte, tijd, aantal dimensies en het begrip van *deeltjes* als punten of mogelijk als meer-dimensionale structuren zoals snaren.

Juist de koppeling van massa en ruimte-tijd biedt mogelijk ook een uitweg waar zwaartekracht een heel andere soort kracht is, bekend als een *entropische kracht*. Hiervoor kijken we allereerst weer even naar het extreme geval, namelijk een zwart gat, waar alle informatie zich op het oppervlak bevindt. Bekenstein heeft beargumenteerd dat het oppervlak gemeten in 'Planck oppervlakjes' L_{Pl}^2 precies correspondeert met het aantal microtoestanden, zeg maar vrijheidsgraden,

$$n = \frac{A}{L_{\text{Pl}}^2} = \frac{A c^3}{G \hbar} = \frac{4\pi R_S^2 c^3}{G \hbar} = \frac{16\pi G M^2}{\hbar c}. \quad (6.7)$$

We hebben al beargumenteerd dat via kwantumeffecten een zwart gat 'verdampt'. De straling van een verdampend zwart gat correspondeert met die van een object met de *Hawking temperatuur*,

$$kT_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M}. \quad (6.8)$$

De constante van Boltzmann is niets anders dan de omrekeningsfactor van energie naar temperatuur ($k = 1,380\,649 \times 10^{-23}$ J/kg). Net als in een gas met een bepaalde tempe-

ratuur is $\frac{1}{2} kT$ precies de gemiddelde energie per vrijheidsgraad. Voor een zwart gat gaat dit inderdaad ook netjes op. Het is eenvoudig te checken dat de energie wordt gegeven door

$$Mc^2 = n \frac{1}{2} kT_H. \quad (6.9)$$

De link met het aantal vrijheidsgraden is door Verlinde gebruikt worden om een uitdrukking voor de zwaartekracht te vinden op een (bol)oppervlak met straal R en daarin een massaconcentratie M . Het uitgangspunt is dat ook op dat boloppervlak het aantal vrijheidsgraden geteld kan worden als het aantal Planck oppervlakjes, dus $n = 4\pi R^2 c^3 / G\hbar$ net als op het oppervlak van een zwart gat. Het weghalen van een testmassa m (een Compton golflengte naar buiten) kost energie (kracht $\times$ weg) gegeven door $F\Delta R = F\hbar/mc$. Bij polymeren is dit een bekend thermodynamisch verschijnsel, gekoppeld aan de verandering van de entropie S bij de overgang tussen twee media. De relatie hangt samen met de temperatuur, $F\Delta R = T\Delta S$. De entropie is gerelateerd aan het aantal mogelijke microtoestanden Ω via $S = k \ln \Omega$. Deze verandering is dus evenredig met de Boltzmannconstante k , laten we even poneren $\Delta S = 2\pi k$ waaruit dan volgt dat $T\Delta S = 2\pi kT$. Gebruikmakend van vergelijking 6.9, maar dan op het boloppervlak op afstand R , krijgen we

$$F \frac{\hbar}{mc} = 2\pi kT = 4\pi \frac{Mc^2}{n} = \frac{\hbar GM}{c R^2} \implies F = \frac{GMm}{R^2}, \quad (6.10)$$

de gravitatiekracht tussen twee massa's. De beginvergelijking in bovenstaande regel kan ook worden gezien als de temperatuur die een versnelde waarnemer waarneemt, $2\pi kT = \hbar a/c$ (Unruh-effect). Dat is een manier om de factoren zoals de gebruikte 2π in de entropieverandering te vinden.

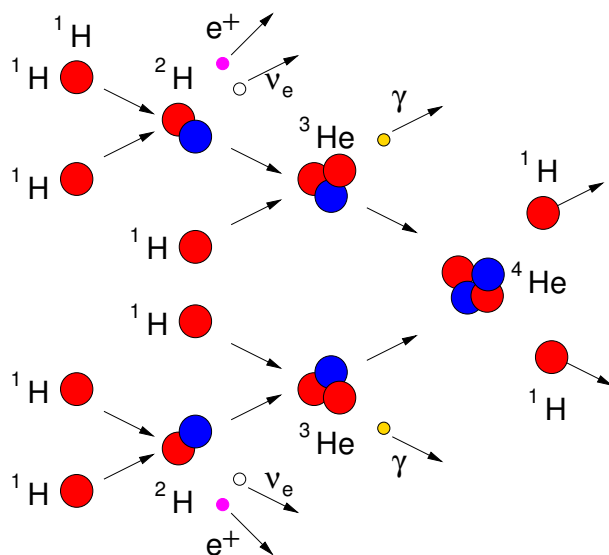
Het standaardmodel staat al sinds ongeveer 1970 als een prachtig huis, waarvan we de bouwstenen en het bouwplan kennen, en waarvan de uitwerking ons blijft verrassen.

Hoofdstuk 7

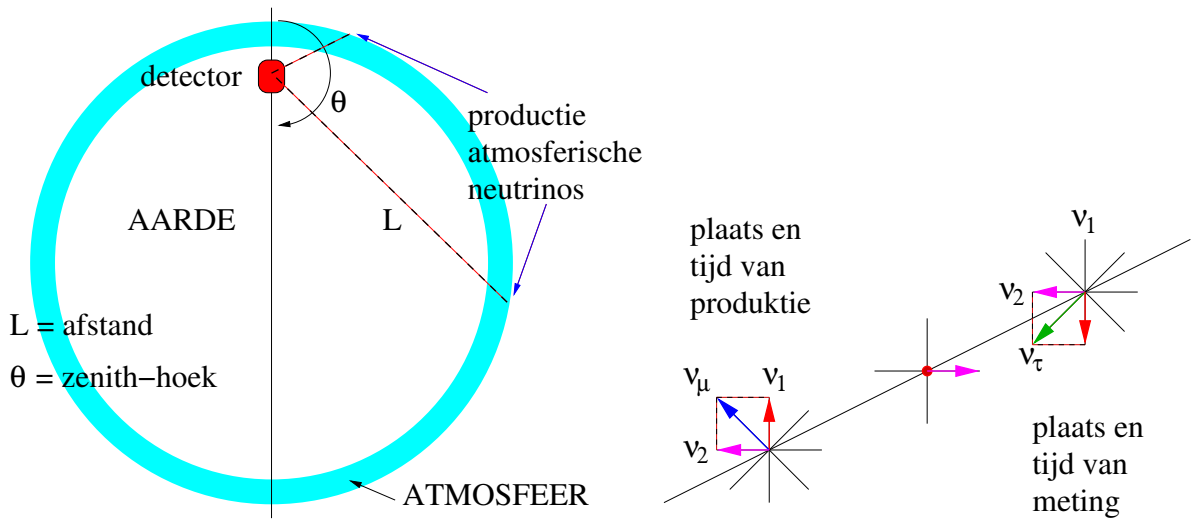
Het ongrijpbare neutrino

7.1 Waar komen neutrino's vandaan?

In dit hoofdstuk willen we één deeltje wat extra aandacht geven, namelijk het neutrino. Het neutrino werd in eerste instantie in 1930 gesuggereerd door Pauli als een neutraal deeltje met spin $1/2$ dat vrijkomt in kernreacties en zo verklaart waarom het lijkt dat energie en impulsmoment niet behouden zijn. De eenvoudigste reactie is het verval van een vrij neutron in een proton + elektron + neutrino, $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, waarbij het geproduceerde antineutrino alleen rechthandig is. Wanneer in een atoomkern een neutron in een proton verandert, krijgen we een nieuwe atoomkern met een andere lading (dit heet β^- -verval). In een atoomkern is het ook mogelijk dat een proton verandert in een neutron onder uitzending van een positron en een linkshandig neutrino, $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ (logischerwijs β^+ -verval genoemd). Op de energieschalen van kernprocessen, spelen de massa's van de neutrino's geen enkele rol. Energie en impuls van de vrijkomende neutrino's (en elektronen) zijn van de orde van grootte van het energieverschil tussen neutron en proton ($m_n c^2 - m_p c^2 = 1.4 \text{ MeV}$) en de bindingsenergieën van atoomkernen, d.w.z. MeV's. Voor neutrino's is deze energie veel groter dan de massa, $E_\nu \approx p_\nu c \gg m_\nu c^2$ en ze bewegen dus ook met praktisch de lichtsnelheid.



Figuur 7.1: De belangrijkste reactie waarmee de zonneënergie wordt opgewekt is de reactie $4p \rightarrow ^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$. Hierbij verliest de Zon per seconde ruim 4 miljard kilo aan massa. In de reactie zelf is het massaverlies ongeveer 0,75 %. Voor iedere geproduceerde ^4He atoomkern worden 2 elektron-neutrino's geproduceerd. Een eenvoudige orde van grootte berekening leert dat we op Aarde dan ruim $10^{11} \nu_e$'s per cm^2 per s verwachten met energieën in de orde van grootte van een halve MeV. Hiervan wordt echter de helft niet waargenomen, de zonneneutrino puzzel.



Figuur 7.2: Het meten van vacuümoscillaties met behulp van atmosferische neutrino's, beschreven in paragraaf 4.2. In de rechterfiguur is het principe geïllustreerd. Gesimplificeerd, bestaat de golf functie van het muon-neutrino uit twee componenten die corresponderen met verschillende massatoestanden, wat zich vertaalt in verschillende golflengte's in de golf functies (in figuur is λ_1 tweemaal zo groot als λ_2). Afhankelijk van de afgelegde afstand is de nieuwe toestand dan een andere lineaire combinatie van massatoestanden, bijvoorbeeld juist corresponderend met een tau-neutrino. De weg die neutrino's afleggen tussen productie en detectie varieert omdat de in de atmosfeer van de Aarde geproduceerde neutrino's van alle kanten de detector bereiken geïllustreerd in de linkerfiguur, waarbij (even ter herinnering) de Aarde zelf voor neutrino's geen belemmering vormt.

Een belangrijk proces waarbij neutrino's geproduceerd worden is de fusie van Waterstof tot Helium dat plaatsvindt in het binnenste van de Zon (zie figuur 7.1). De geproduceerde elektron-neutrino's vliegen min of meer ongehinderd vanuit het centrum van de Zon naar de Aarde, maar slechts ongeveer de helft van de ν_e 's die op grond van berekeningen werd verwacht bleek op Aarde aan te komen. Overigens komen er niet alleen ν_e 's van de Zon ten gevolge van de pp -reactie, maar ook andere fusiereacties waarbij koolstof (C), zuurstof (O) of stikstof (N) geproduceerd worden dragen op kenmerkende manier bij aan het spectrum van de zonneneutrino's. Het zijn deze energie-producerende reacties via welke de meeste stabiele elementen tot aan ijzer (Fe) toe gevormd zijn en worden.

Net als de Zon produceren ook andere sterren neutrinos, maar daarvan komen er door de afstand niet zoveel op Aarde. Een uitzondering zijn supernova explosies, waarbij gigantische hoeveelheden neutrino's geproduceerd worden. Ook hier zijn de neutrinos het gevolg van kernfusie reacties. Dit zijn niet alleen de kernreacties die energie opleveren, maar ook energie opslurpende reacties, waarbij stabiele zware elementen worden gevormd zoals lood (Pb) tot aan uranium (U) toe. Deze ook in de Aarde voorkomende elementen zijn dus ontstaan in exploderende sterren en daarna bij de vorming van nieuwe sterren terechtgekomen in de planeten.

Naast de in sterren geproduceerde neutrinos, zijn er ook neutrino's overgebleven van de Oerknal. Hiervan zijn de aantallen vergelijkbaar met het aantal fotonen, zo'n 200 per cm^3 . Als die met de lichtsnelheid bewegen, betekent dat dus een flux van ruim 10^{13} neutrino's

per cm^2 per s. Dit zijn neutrinos van alle drie de soorten, ν_e , ν_μ en ν_τ . De energieën van deze neutrino's zijn overigens veel lager dan die van zonneneutrino's, namelijk van de orde van grootte van 10^{-4} eV. Dit correspondeert met de gemiddelde kinetische energie kT ($k \approx 9 \times 10^{-5}$ eV/K is de constante van Boltzmann) van deeltjes in het sinds de Oerknal afkoelende heelal. De temperatuur van het heelal is nu nog maar zo'n 2,7 K (we komen hier nog op terug).

Ook op Aarde worden neutrino's geproduceerd. Dit gebeurt o.a. in de atmosfeer waar hoog-energetische deeltjes uit de kosmische straling botsen met de atomen. De primaire deeltjes kunnen protonen, elektronen, fotonen zijn of zwaardere atoomkernen, met energieën die kunnen oplopen tot zo'n 10^{20} eV. In de botsingen met de atomen in de atmosfeer kunnen allerlei deeltjes gemaakt worden, maar uiteindelijk komen we uit op protonen, elektronen en pionen. Neutrino's ontstaan voornamelijk via het zwakke verval van geladen pionen, bijvoorbeeld $\pi^+ \rightarrow \nu_\mu + \mu^+$ gevolgd door $\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$, ruwweg leidend tot een verhouding van 2 : 1 voor $N(\nu_\mu)/N(\nu_e)$. Vergeleken bij de eerder genoemde neutrino's hebben deze neutrino's veel hogere energieën. Net als de primaire deeltjes gaat het om neutrino energieën in de orde van honderden MeV's tot vele GeV's, energieën die nodig zijn om gemakkelijk pionen (met $m_\pi c^2 \approx 140$ MeV) te kunnen produceren.

Het Super-Kamiokande experiment, een groot vat met 50 000 000 liter ultra-zuiver water ongeveer 1 km onder de berg Ikeno in de Japanse Alpen, mat o.a. de atmosferische neutrinos met energieën in de orde van enkele honderden MeV's tot GeV's, die van alle kanten de detector binnenkwamen. Per seconde vliegen er ca 100 van die neutrino's door iedere cm^3 van de detector en idem door ons lichaam. Vanwege het feit dat de wisselwerking zo zwak is, is er slechts een 10 % kans dat een zo'n neutrino botst met een atoom in ons lichaam gedurende ons hele leven. Het illustreert, waarom de detector in het Super-Kamiokande experiment zo groot is. Wanneer daar een neutrino botst met een atoom wordt er afhankelijk van wat voor soort neutrino het was een muon of een elektron gevormd. Dit deeltje beweegt sneller dan de lichtsnelheid in water (die kleiner is dan de lichtsnelheid in vacuüm) en produceert een lichtkegel (Cerenkov licht), geheel analoog aan de geluidskegel veroorzaakt door een supersonisch vliegtuig. Op deze manier kan experimenteel bepaald worden wat voor neutrino er gevangen is. De opstelling is zo diep ondergronds om te zorgen dat er geen andere deeltjes dan neutrino's de detector bereiken.

7.2 Neutrino oscillaties.

Het blijkt nu dat muon-neutrino's kunnen veranderen in een andere soort. Dit is afhankelijk van waar de neutrino's gemaakt zijn in de atmosfeer en dat kan variëren met de zenith hoek (zie figuur 7.2) van enkele kilometers boven de detector tot ruim 12 000 km wanneer ze dwars door de Aarde van de andere kant komen. Het experiment ziet afhankelijk van de afstand meer of minder muon-neutrino's en daarmee oscillaties. Het sluit ook uit dat ze veranderen in elektron-neutrino's, maar het zouden wel tau-neutrino's kunnen zijn. Voor neutrino's is de Aarde in essentie transparant en het gaat hier dan ook om vacuümoscillaties. Voor het bestaan van dergelijke vacuümoscillaties is slechts één goede verklaring beschikbaar, namelijk dat het geproduceerde neutrino een superpositie is van twee massa-eigentoestanden met verschillende massa's. Hoe dit werkt is uitgelegd in het volgende kader.

Veronderstel voor het gemak dat twee eigentoestanden voor neutrino's voldoende zijn om de oscillaties van ν_μ en ν_τ te beschrijven. We hebben dan golf functies met 2 componenten

$$|\nu_1(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i E_1 t/\hbar}, \quad |\nu_2(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i E_2 t/\hbar}$$

Het muon-neutrino is een lineaire combinatie van de toestanden 1 en 2, geschreven als

$$|\nu_\mu\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta_V \\ \sin \theta_V \end{pmatrix}.$$

Gegeven dat op tijdstip nul we een muon-neutrino hebben, $|\nu(0)\rangle = |\nu_\mu\rangle$, krijgen we

$$|\nu(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta_V e^{-i E_1 t/\hbar} \\ \sin \theta_V e^{-i E_2 t/\hbar} \end{pmatrix}.$$

Een elementaire berekening laat dan zien dat de waarschijnlijkheid $P(L)$ om na afleggen van een afstand L , met de snelheid van het licht een tijd $t = L/c$, weer een muon aan te treffen gelijk is aan

$$\begin{aligned} P(L) = |\langle \nu_\mu | \nu(t) \rangle|^2 &= 1 - \sin^2 2\theta_V \sin^2 \left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} t \right) \\ &= 1 - \sin^2 2\theta_V \sin^2 \left(\pi \frac{L}{\lambda_V} \right) \end{aligned}$$

met $\lambda_V = 2\pi \hbar c / (E_1 - E_2)$. Wanneer $m_1 c^2$ en $m_2 c^2 \ll pc$ en dus $E_1 \approx E_2 \approx E_\nu \approx pc$, geldt

$$E_1 = \sqrt{p^2 c^2 + m_1^2 c^4} \approx pc + \frac{m_1^2 c^4}{2pc}, \quad \text{en} \quad E_2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_2^2 c^4} \approx pc + \frac{m_2^2 c^4}{2pc},$$

zodat $E_2 - E_1 \approx (m_2^2 c^4 - m_1^2 c^4) / 2E_\nu = \Delta m^2 c^4 / 2E_\nu$. De oscillatie golflengte wordt dan

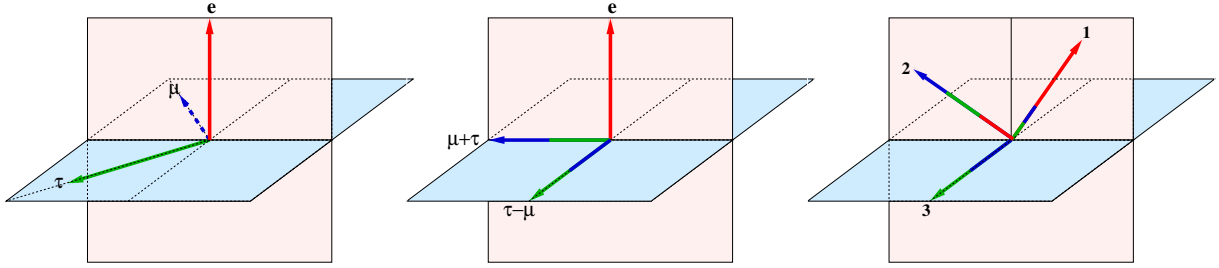
$$\lambda_V = 4\pi \frac{\hbar c E_\nu}{(m_2^2 - m_1^2) c^4}.$$

De golflengte van de oscillaties hangt af van de verschillen in de gekwadrateerde massa's van de neutrino's. Gebruikmakend van 'passende' eenheden krijgen we

$$\lambda_V [\text{km}] \approx 2,5 \frac{E [\text{GeV}]}{\Delta m^2 c^4 [\text{eV}^2]},$$

waar $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ het verschil in de gekwadrateerde massa's is. De resultaten wijzen op een massaverschil van ongeveer $(0,05 \text{ eV})^2$, wat voor een 1 GeV neutrino correspondeert met $\lambda_V \approx 1000 \text{ km}$. Merk op dat dit massaverschil enorm klein is, ongeveer 10^{-7} maal de massa van een elektron. Bovendien vereist de oscillatie hypothese dat een geproduceerd muon-neutrino een superpositie is van de massa-eigentoestanden met amplitudo's van ongeveer gelijke grootte (maximale menging met een menghoek $\theta_V \approx 45$ graden).

Het probleem van de ontbrekende zonne-neutrino's – we verwachten voornamelijk



Figuur 7.3: De mixing van de neutrino toestanden. Uit atmosferische menging blijkt dat ν_μ en ν_τ lineaire combinaties vormen die bij benadering $(\nu_\tau \pm \nu_\mu)/\sqrt{2}$ zijn (middelste plaatje). Een van die combinaties is bij benadering ν_3 . De andere mengt met het ν_e neutrino in de massatoestanden ν_1 en ν_2 (rechterplaatje). In de komende jaren zullen diverse detectoren proberen neutrino's geproduceerd met versnellers of in kernreactoren te meten en zo het plaatje van de menging en de massa's van neutrino's compleet te maken, inclusief meting van CP-schending en dus ook schending van tijdsomkeer.

elektron-neutrino's met lagere energieën (MeV's) – is met vacuüm oscillaties nog niet opgelost. Maar ook hier zijn kwantummechanische oscillaties de meest waarschijnlijke verklaring. Het gedrag van neutrino's is in dat opzicht verbazingwekkend:

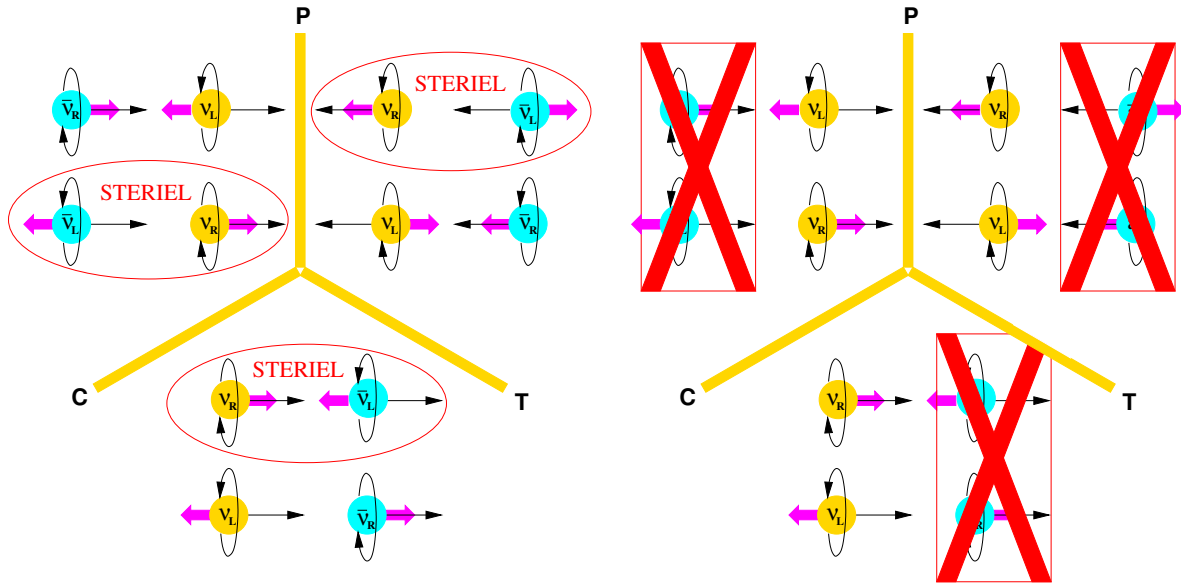
1. In vacuüm bewegen neutrino's onafhankelijk wanneer we ze beschouwen als massa-eigentoestanden ν_1 , ν_2 en ν_3 .
2. Productie en detectie van neutrino's gaat via de zwakke wisselwerkingen. De relevante geproduceerde of in een detector gemeten toestanden zijn ν_e , ν_μ of ν_τ .
3. Absorptie in materie (bijvoorbeeld in de Zon) hangt af van hoe de omgeving neutrino's kan absorberen. Zo kunnen elektronen alleen elektron-neutrino's beïnvloeden, terwijl de protonen en neutronen alle neutrino's even sterk beïnvloeden.

Het in het derde punt genoemde gedrag kan bij een bepaalde dichtheid van elektronen de in de Zon geproduceerde elektron-neutrino's (zie figuur 7.1) een zodanige 'fase-draaiing' geven (analoog aan de in figuur 7.2 geïllustreerde draaiing bij vacuümoscillaties) dat er neutrino's van alle soorten worden geproduceerd, het zogenaamde MSW (Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein) effect. Inderdaad is in het SNO (Solar Neutrino Observatory) experiment in een mijn in Ontario gevonden dat wat we missen aan elektron-neutrino's van de Zon, als andere neutrino's de Aarde bereikt. Uit deze oscillaties kan ook weer een massaverschil worden gehaald. Dit blijkt veel kleiner te zijn, namelijk $\Delta m^2 c^4 \approx (0,01 \text{ eV})^2$, waarbij overigens niet te bepalen is of het kleinere massaverschil bij de twee 'zwaarste' of de twee 'lichtste' neutrino's hoort. De huidige bekende menging van neutrino's is geïllustreerd in figuur 7.3.

7.3 Consequenties van massieve neutrino's

Consequenties voor de elementaire deeltjesfysica

Neutrino massa's hebben belangrijke consequenties voor de symmetrie-beschouwingen in het standaard model. Massaloze neutrino's pasten in principe prachtig in het hele beeld



Figuur 7.4: De overblijvende mogelijkheden voor massieve neutrinos zijn steriele Dirac-neutrinos (links) of Majorana-neutrinos (rechts)

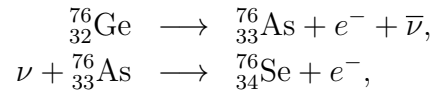
van de drie generaties met elk vier deeltjes. Met name wanneer men eigenschappen van de deeltjes en de corresponderende antideeltjes bekijkt, specifiek de uitsluitend linkshandigheid van neutrino's (zie figuur 4.11) en de uitsluitend rechtshandigheid van anti-neutrino's. Voor een massaloos spin-1/2 deeltje is linkshandigheid hetzelfde als een impulsmoment tegengesteld aan de bewegingsrichting. Voor een spin-1/2 deeltje mét massa moet zowel de linkshandige als de rechtshandige variant bestaan. Een massief deeltje beweegt namelijk langzamer dan de lichtsnelheid en we kunnen het bekijken als waarnemer die sneller beweegt dan het deeltje. Dan wordt een linkshandig deeltje rechtshandig. Spiegelsymmetrie vereist bovendien dezelfde wisselwerkingen voor beide situaties.

Laten we eerst weer even de spiegelsymmetrie, symmetrie onder tijdsomkeer en de ladingssymmetrie, symmetrie onder verwisseling van deeltje-antideeltje in herinnering roepen. Voor quarks en elektronen en voor sterke en elektromagnetische wisselwerkingen deden zulke operaties er niet toe (zie afbeelding op omslag). We bleven dezelfde deeltjes houden en de krachten waren hetzelfde. De afwezigheid van spiegelsymmetrie voor zwakke wisselwerkingen, laat dan de volgende mogelijkheden toe, geïllustreerd in figuur 7.4:

1. Er is een rechtshandig neutrino (het neutrino is een 'Dirac' fermion) dat in tegenstelling tot zijn linkshandige partner niet kan wisselwerken met de ons bekende materie via uitwisseling van W of Z -bosonen (zie figuur 5.7). In dat geval spreekt men van een steriel neutrino.
2. Een tweede mogelijkheid is dat het deeltje identiek is aan zijn eigen antideeltje (een eigenschap meestal voorbehouden aan bosonen zoals het foton). In dat geval vormen het linkshandig neutrino en het rechtshandig antineutrino de gewenste mogelijke varianten van één massief spin-1/2 deeltje en dat is dan een Majorana deeltje (deeltje = antideeltje).

Beide mogelijkheden impliceren echter een uitbreiding van het standaard model, waarbij de Majorana variant het minst ingrijpend is, enkel het antideeltjes karakter van de

rechtshandige variant wordt weggelaten. Het eenvoudigste (maar eenvoudiger gezegd dan gedaan) is deze mogelijkheid te bewijzen door naar het verval van atoomkernen te kijken, bijvoorbeeld het verval van $^{76}_{32}\text{Ge}$ met 32 protonen en 44 neutronen. De ‘standaard’ reacties,



kunnen voor een Majorana neutrino ($\nu = \bar{\nu}$) namelijk gecombineerd worden tot



het zogenoemde neutrinoloze dubbel-bèta verval. Wanneer dit aangetoond kan worden, maar zoals gezegd dat is niet eenvoudig, weten we zeker dat deeltje en antideeltje hetzelfde zijn.

Astrofysische consequenties.

Hoewel de gevonden massa's, of eigenlijk massaverschillen bijzonder klein zijn, is het aantal neutrino's in het heelal zo groot dat de ontdekking ook een oplossing leek te bieden voor het raadsel van de ‘ontbrekende materie’ in het heelal. Astrofysici die het ontstaan en de structuur van melkwegstelsels bestuderen vinden stevast te weinig materie om hun theorieën kloppend te krijgen (zie volgende hoofdstuk). Hiervoor moeten we naast de massaverschillen de waarden van de massa's weten. Het ene extremum is dat de massa's 0,05 eV en ongeveer nul zijn. In dat geval is de bijdrage van neutrino's aan de donkere materie in het heelal te verwaarlozen. Het andere extremum is dat beide neutrino's behoorlijk wat zwaarder zijn dan het verschil, zeg in de orde van grootte van eV's, al lijkt dit scenario minder waarschijnlijk te worden omdat uit normale bèta vervalsprocessen (zoals het verval van het neutron) steeds betere limieten op de massa's worden verkregen. Echter, voor het geval dat er rechtshandige steriele neutrino's bestaan, kunnen die zeker bijdragen aan de ontbrekende massa in het heelal.

Neutrino's zouden best wel eens de meest waardevolle boodschappers vanuit de kosmos kunnen zijn.

Hoofdstuk 8

De geschiedenis van het heelal

8.1 De oerknal

Een aantal aspecten van de krachten tussen deeltjes en de opbouw van de materie spelen ook een rol in de ontstaansgeschiedenis van het heelal. Het meest waarschijnlijke scenario voor de geschiedenis van het heelal is het oerknalscenario. Een van de belangrijkste aanwijzingen hiervoor is de door Edwin Hubble gevonden roodverschuiving in het licht van ververwijderde sterrenstelsels, gevolg van het Doppler-effect. Dit wijst op een met de afstand toenemende verwijderingssnelheid van sterrenstelsels op kosmische schaal wat kan worden toegeschreven aan een uitdijend heelal met $\dot{R}/R = H$, waarin $1/H = 13,7$ miljard jaar. De verwachting dat de gloed van de oerknal nog steeds zichtbaar moest zijn werd bevestigd met de ontdekking van de kosmische achtergrondstraling. Net zoals vlammen, gloeiende materialen en sterren afhankelijk van de temperatuur een karakteristiek spectrum (Planck verdeling, zie kader) van elektromagnetische straling uitzenden, doet het heelal dat ook. Voor de Zon met een oppervlaktetemperatuur van ongeveer 6 000 graden ligt het maximum van deze verdeling bij golflengtes tussen 400 en 800 nm, het voor ons zichtbare spectrum van licht, evolutionair gezien niet verrassend. De door de COBE satelliet gemeten achtergrondstraling liet een perfecte Planck curve zien corresponderend met een temperatuur van 2,725 K voor het op dit moment dus al aardig afgekoelde heelal. Het maximum ligt dan in het gebied van radiogolven.

De homogeniteit in de achtergrondstraling is ongekend, beter dan welke lichtbron in het laboratorium. Denkend aan een oerknal scenario is dat helemaal niet vanzelfsprekend. Inhomogeniteiten in de verdeling van energie en impuls zouden zichtbaar moeten zijn. Het ontbreken hiervan wijst op een universumbrede gebeurtenis na de oerknal. De inflatietheorie biedt hiervoor een oplossing. In een heel vroeg stadium is er bij het afkoelen een faseovergang opgetreden, waarbij er een nieuwe beginsituatie is ontstaan. Het wordt wel met een soort ‘overkoken’ van het heelal vergeleken waarmee we de homogeniteit kunnen begrijpen in de temperaturen die we zien wanneer we kijken in verschillende richtingen die vanuit een punt gezien niet causaal kunnen samenhangen. Als we maar nauwkeurig genoeg kijken zijn er wel variaties in de achtergrondstraling, waar we nog op terug komen.

Planck spectrum

De beschrijving van de spectrale verdeling van elektromagnetische straling bij een bepaalde temperatuur is een van de basis resultaten van de kwantummechanica. Statistische fysica en thermodynamica leren ons dat we bij een bepaalde temperatuur verwachten dat de kans op bezetting van een toestand met energie E evenredig afvalt met $e^{-E/kT}$ waar k de Boltzmann constante,

$$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,6 \times 10^{-5} \text{ eV/K},$$

is. In feite is dit niets anders zeggen dan dat de gemiddelde energie

$$\overline{E}(T) = \frac{\int_0^\infty dE E e^{-E/kT}}{\int_0^\infty dE e^{-E/kT}} = kT,$$

wat uitstekend werkt voor een gas van deeltjes met een continuum van mogelijke (kinetische) energieën. Voor fotonen met bij gegeven frequentie f gekwantiseerde energieën $E = n h f$ wordt dit echter

$$\overline{E}(f, T) = \frac{\sum_{n=0}^\infty n h f e^{-n h f / k T}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-n h f / k T}} = \frac{h f}{e^{h f / k T} - 1}.$$

Om de totaal uitgezonden energie te vinden van een foton gas moeten we dit nog vermenigvuldigen met het aantal fotonen bij een bepaalde frequentie. Dat tellen gaat gemakkelijker door naar de impuls van een foton te kijken, dat is een vector met lengte $p = h f / c = h / \lambda$. Om te kunnen tellen moeten we nog wel weten waar we mee moeten vergelijken. De laagste frequentie is h/L , waar L de lengte van het systeem is. Dat is dan de één en tellen is sommeren over $p/(h/L) = pL/h$, wat in het continue geval integreren wordt, dus tellen wordt

$$\frac{L^3}{h^3} \int d^3 p \dots = \frac{V}{h^3} \int 4\pi p^2 dp \dots = \frac{V}{c^3} 4\pi f^2 df \dots$$

Rekening houdend met de twee mogelijke polarizaties van een foton vinden we na vermenigvuldiging met de gemiddelde energie $\overline{E}(f, T)$ een energiedichtheid (energie/volume) $\int df \mathcal{E}(f, T)$ met

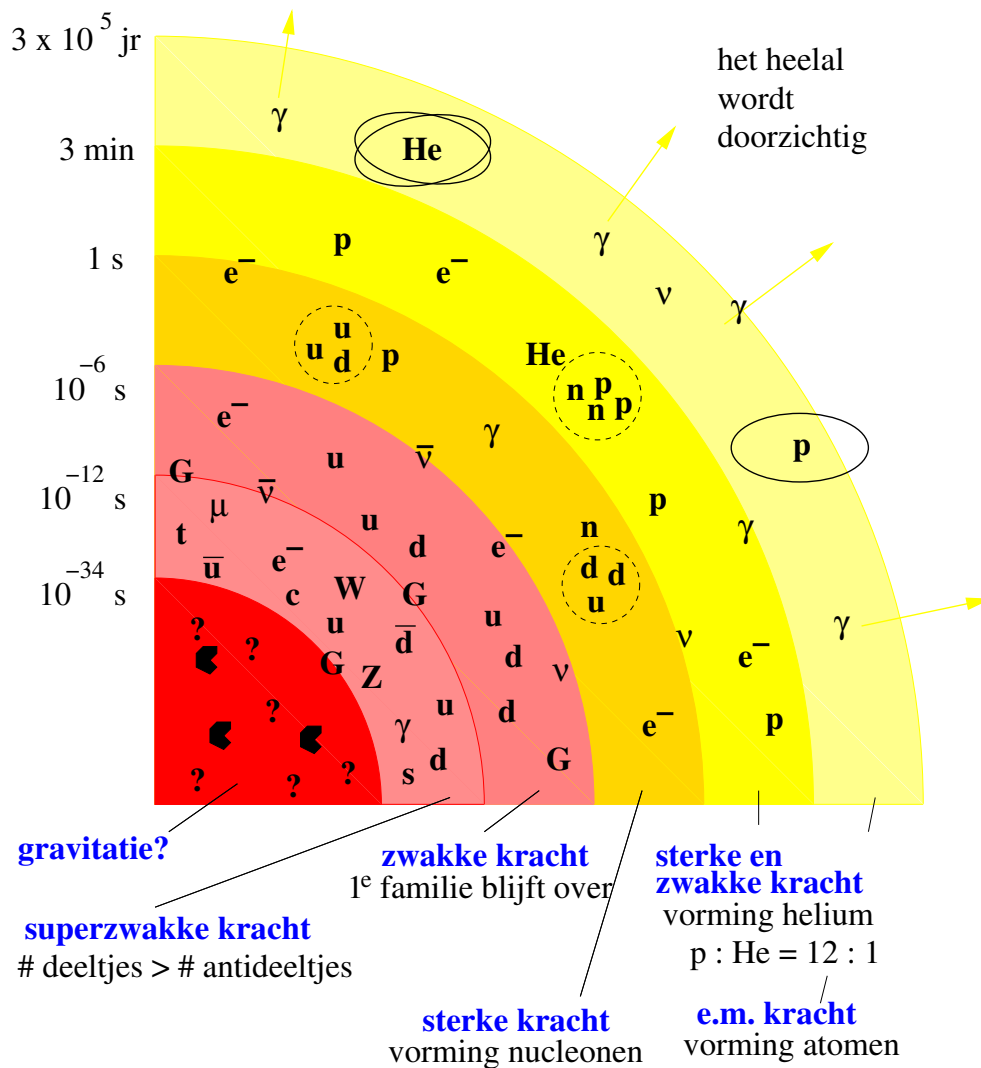
$$\mathcal{E}(f, T) = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{e^{h f / k T} - 1},$$

bekend staand als de Planck verdeling, waarbij het gebruik van de kwantum uitdrukking voor de gemiddelde energie essentieel was. Als functie van de golflengte vinden we, gebruikmakend van $df = d(c/\lambda) = (c/\lambda^2)d\lambda$, de energiedichtheid $\int d\lambda \mathcal{E}(\lambda, T)$,

$$\mathcal{E}(\lambda, T) = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{h c / \lambda k T} - 1}.$$

Het maximum van deze verdeling ligt bij

$$\lambda_{\max} T = 2,9 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$



Figuur 8.1: Een aantal stadia in het oerknalscenario

Planck spectrum (vervolg)

Het totaal uitgezonden vermogen neemt sterk toe met de temperatuur, om precies te zijn het uitgezonden vermogen per m^2 over het gehele spectrum is gelijk aan

$$I(T) = c \mathcal{E}(T) = \sigma T^4.$$

waarbij $\sigma = 5,7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

Waar is de antimaterie gebleven

Van de allereerste stadia van de oerknal weten we weinig. Met een naieve schaling is dat meteen in te zien. We noemden al de 1 atoom per m^3 als gemiddelde in het huidige heelal, d.w.z. een gemiddelde afstand nu van 1 m. Via eenvoudige schaling en vergetend dat deeltjes en antideeltjes gecreëerd en vernietigd kunnen worden correspondeert dat met afstanden van 10^{-17} m, veel kleiner dan een proton toen het heelal enkele seconden oud was. De zwakke en sterke wisselwerkingen speelden toen dus een belangrijke rol zoals ook

beschreven in Weinberg's boek over de eerste 3 minuten van het universum.

Maar met onze kennis van de krachten kunnen we nog wat verder teruggaan. Zo zijn krachten die de deeltje-antideeltje symmetrie (C) schenden van wezenlijk belang om te begrijpen dat we nu in een heelal leven met alleen deeltjes en geen antideeltjes. In de figuur 8.1 is dit het eerste 'bekende' stadium dat we onderscheiden. Alhoewel het op het eerste gezicht misschien vreemd klinkt is de deeltje-antideeltje asymmetrie niet erg groot. Het verschil van deeltjes en antideeltjes gedeeld door de som van *alle* deeltjes en antideeltjes is in het huidige heelal ongeveer 10^{-9} . Het aantal antiprotonen en positronen is weliswaar niet noemenswaardig, maar als we over deeltjes praten moeten we natuurlijk wel alle deeltjes in beschouwing nemen en dan tellen fotonen (die zijn hun eigen antideeltje) en neutrino's en antineutrinos ook mee. Van al die deeltjes zijn er van de orde van honderden per cm^3 , dus 10^9 meer dan protonen. Overigens is de waargenomen (en ook niet begrepen) CP-schending in het standaard model van de elementaire deeltjes toch nog te klein om deze asymmetrie te begrijpen, dus hier liggen nog wel de nodige open vragen.

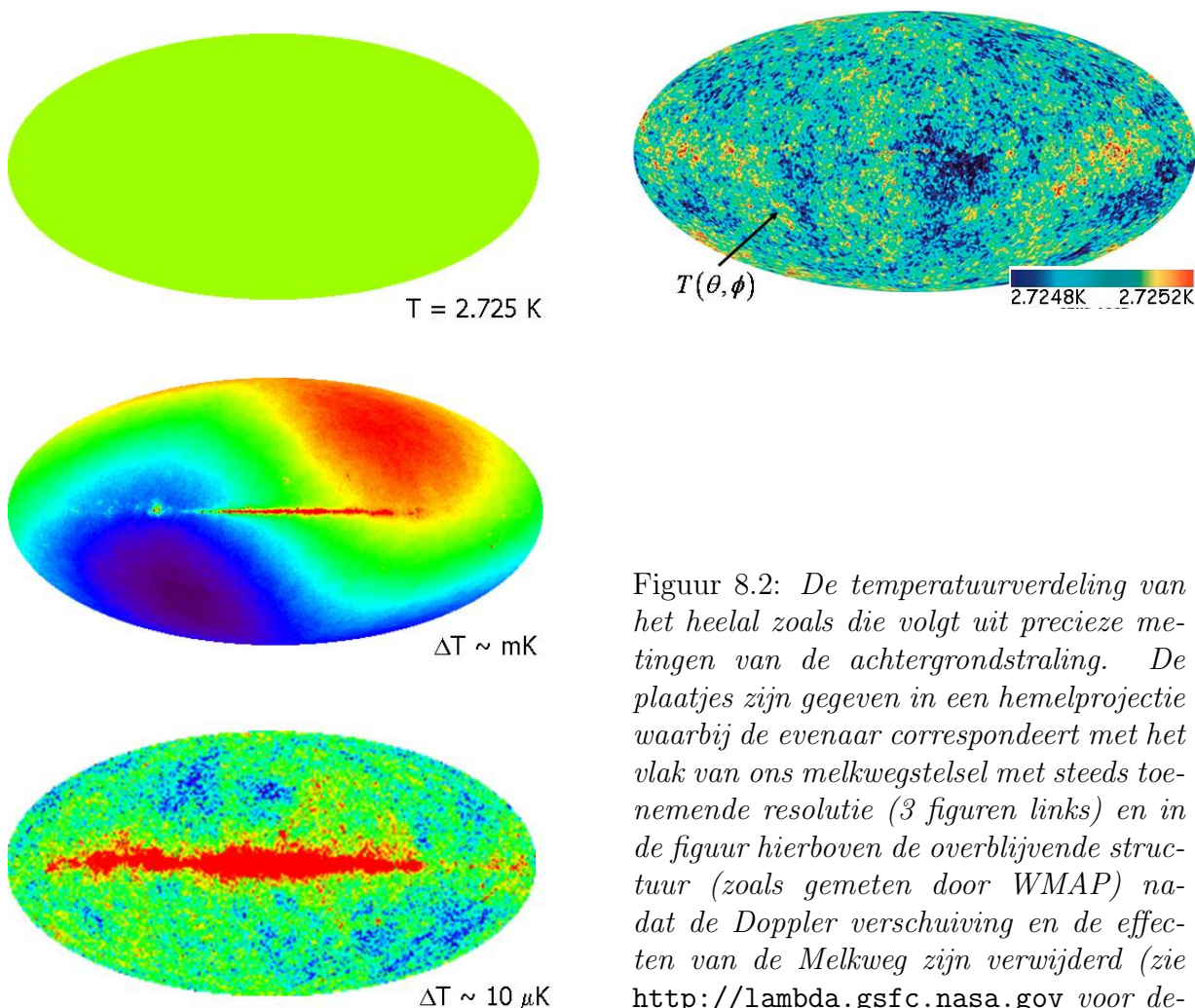
De formatie van hadronen en atoomkernen

In de volgende stadia komen we op bekender terrein. Als het heelal een leeftijd van $1 \mu\text{s}$ heeft bereikt zijn alle zware quarks (t, b, c en s) vervallen tot lichtere quarks. Dit is een gevolg van de zwakke wisselwerkingen. Maar met toenemende afstanden tussen de quarks beginnen de overgebleven u en d quarks de constante sterke kleurkracht te voelen. Ze combineren noodgedwongen in tripletten van quarks of quark-antiquark paren, waarbij uiteindelijk alleen protonen en neutronen overblijven. Een pion leeft bijvoorbeeld maar enkele μs . Van de leptonen blijven alleen de elektronen over. Muonen leven ook maar heel kort, ca. $2 \mu\text{s}$. Zelfs de neutronen beginnen te vervallen (die leven ca. 15 minuten). Maar hier komen de sterke wisselwerkingen om de hoek kijken en voordat ze allemaal vervallen zijn wordt een deel van de neutronen veilig opgeborgen in Helium atoomkernen (α -deeltjes). Met onze kennis van de sterke wisselwerkingen en de vervaltijd van het neutron kunnen we precies begrijpen hoe we op een verhouding van He:H van ongeveer 1:12 komen (massaverhouding 1:3), de in het heelal waargenomen verhouding, die door fusieprocessen maar een klein beetje veranderd is.

En toen werd het heelal doorzichtig

In dat heelal waarin nu atoomkernen H en He en via fusie enkele andere lichte atoomkernen zijn ontstaan, wemelt het verder van de fotonen, elektronen en neutrino's. De neutrino's zijn al ontkoppeld van de andere deeltjes, d.w.z. ze vormen een onafhankelijk gas van deeltjes dat in afgekoelde vorm nog steeds bestaat, naar verwachting overigens afgekoeld tot een iets lagere temperatuur van 1,95 K in vergelijking met de fotonen van de achtergrondstraling. De fotonen, elektronen en protonen botsen nog wel met elkaar en vormen een 'gloeiend' plasma. Dat verandert wanneer bijna 400 000 jaar na de oerknal de temperatuur voldoende is afgekoeld en elektronen en protonen combineren tot neutrale Waterstof-atomen of paren van elektronen en He-kernen tot neutrale Helium-atomen. Dan botsen de fotonen ook niet meer en vormen een onafhankelijk afkoelend gas van fotonen. Je zou kunnen zeggen dat het licht uitging en de gloed wegsterft. Dat is de nu waargenomen achtergrondstraling van microgolven met zo'n 400 fotonen/ cm^3 en een temperatuur van 2,725 K. Met het ontstaan van sterren en sterrenstelsels ging het licht

weer aan. Exploderende sterren, supernovae, produceerden zware elementen.

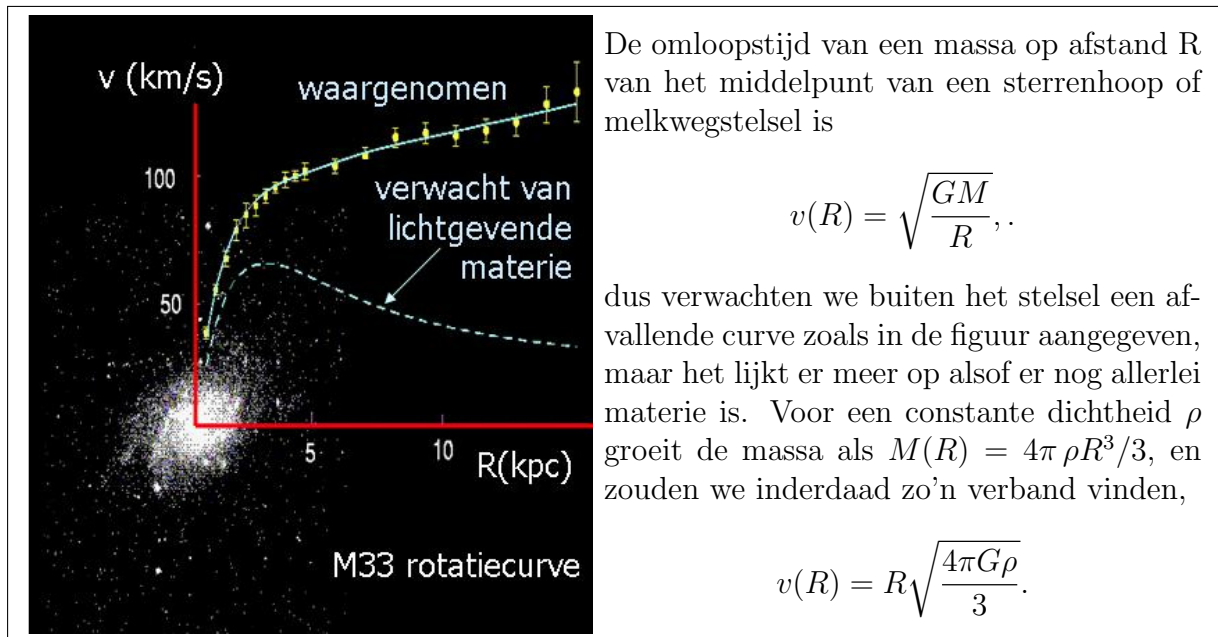


Figuur 8.2: De temperatuurverdeling van het heelal zoals die volgt uit precieze metingen van de achtergrondstraling. De plaatjes zijn gegeven in een hemelprojectie waarbij de evenaar correspondeert met het vlak van ons melkwegstelsel met steeds toenemende resolutie (3 figuren links) en in de figuur hierboven de overblijvende structuur (zoals gemeten door WMAP) nadat de Doppler verschuiving en de effecten van de Melkweg zijn verwijderd (zie <http://lambda.gsfc.nasa.gov> voor details, achtergronden en meer data).

8.2 De temperatuur van het heelal

Het afkoelende heelal is het overblijfsel van de oerknal met een ongekende homogeniteit (zie figuur 8.2). In het eerste plaatje corresponderen schakeringen in kleur met 1 graad Kelvin. Dan zijn er geen variaties te zien. Deze homogene achtergrondstraling werd bij toeval ontdekt door Penzias en Wilson als een (ongewenste) ruis op de antennes waarmee ze naar het heelal luisterden. Met speciaal daarvoor geconstrueerde satellieten is het het gelukt om zeer nauwkeurig de spectrale verdeling van de achtergrondstraling en dus de temperatuur te bepalen. En daar zitten uiteindelijk toch fluctuaties in. Uit de metingen van de Cosmic Background Explorer (COBE) satelliet en met nog veel grotere precisie uit die van de Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) is een gedetailleerd beeld verkregen. Allereerst zien we dat er in het heelal een bijzonder referentiesysteem is, namelijk het rustsysteem van de oerknal. Wij bewegen in dat systeem en wel met een (bescheiden) snelheid van 600 km/s, wat tot gevolg heeft dat we in een bepaalde rich-

ting een roodverschuiving (lagere temperatuur) en in de tegenovergestelde richting een blauwverschuiving (hogere temperatuur) zien. Dit is zichtbaar in plaatje 2 van figuur 8.2 waar de kleurschakeringen corresponderen met een temperatuur-variatie van ongeveer 0,004 K ten opzichte van het gemiddelde. Ook valt dan een klein effect op langs de evenaar, die in de gekozen projectie correspondeert met het vlak van het melkwegstelsel. Na correctie voor het dipoolffect, moet de schaal weer behoorlijk aangepast worden voordat er weer variaties te zien zijn. Die komen tevoorschijn als de kleurschakeringen corresponderen met variaties van 10 μ K. Rond de evenaar zien we de effecten in het vlak van het melkwegstelsel, daarbuiten komen ze van de rand van het zichtbare heelal. Deze fluctuaties hebben typisch afmetingen van een halve graad, dat is ongeveer de afmeting van de Maan aan de hemel. Vervolgens is er een (kleinere) concentratie van fluctuaties bij afmetingen van 0,2 graden. Die fluctuaties horen bij de dynamica van een soep van protonen, elektronen en fotonen, het heelal van 300 - 400 000 jaar na de Big Bang, waarin het aantal fotonen vele ordes groter is dan de protonen. Nu is die verhouding ruwweg 10^9 met gemiddeld in het heelal zo'n 1 proton per m^3 en zo'n 10^9 fotonen. Nog kleinere fluctuaties, die typisch zo'n 0,1 graden bestrijken, zijn de eerste die toegeschreven kunnen worden aan de anisotropie in de verdeling van de materie (waterstof en helium) in het toenmalige heelal. Vooralsnog zijn daarin geen correlaties gevonden met het huidige heelal.



Ook de uitdijingssnelheid van het heelal blijkt niet constant te zijn. Door de roodverschuiving uit te zetten tegen de afstand bepaald uit 'gewone' afstandsmetingen waarbij gebruik gemaakt wordt van de bekende absolute helderheid van bepaalde types supernovae, lijkt het alsof de uitdijing enigszins toeneemt in de tijd. De resultaten van de temperatuurvariaties gecombineerd met uitdijingssnelheid van het huidige en vroegere heelal lijken een verrassend beeld van het heelal te geven. Het lijkt er op dat ons heelal plat is, d.w.z. de drie-dimensionale ruimte ligt niet op een meerdimensionale bol (zoals het twee-dimensionale aardoppervlak op de drie-dimensionale aardbol ligt). Vertrekkend in verschillende richtingen, kom je niet meer bij elkaar terug. Maar wat we zien in het heelal is zeker niet alles. Om het oerknalscenario en de platheid van ons heelal consistent

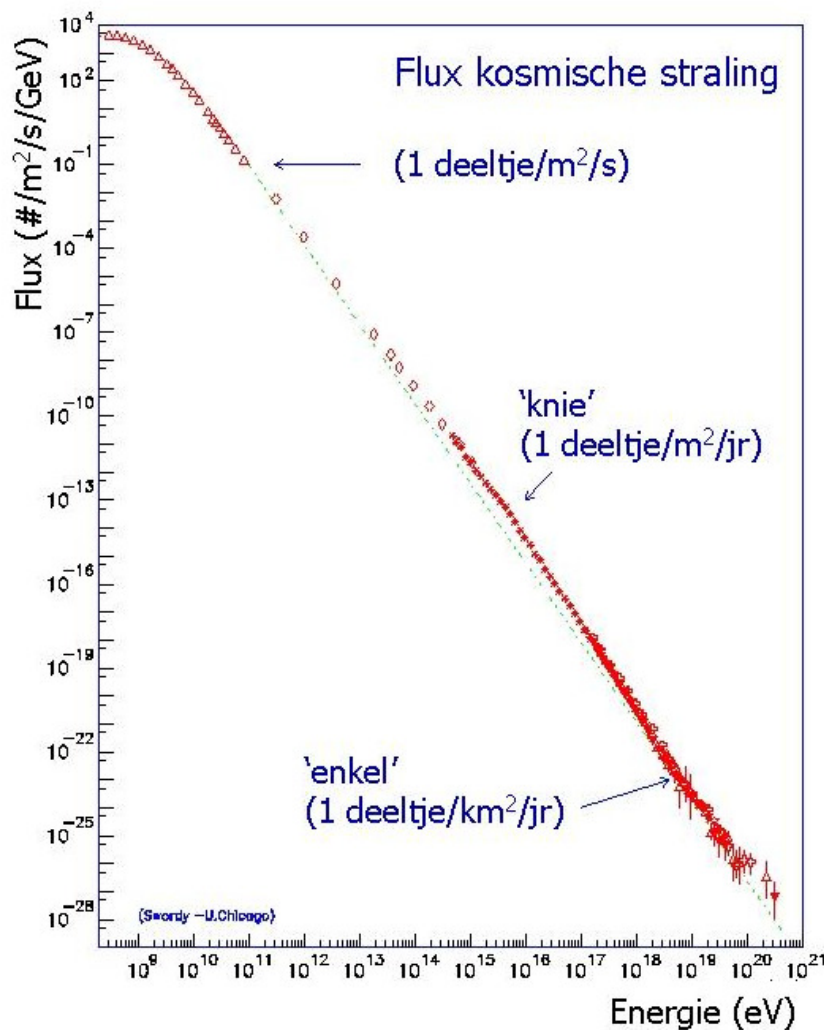


Figuur 8.3: *Aanwijzingen dat de aard van de extra materie in het heelal anders is dan de materie die elementaire deeltjesfysici tot nu toe hebben gevonden komt onder meer uit deze botsing van twee clusters van sterrenstelsels. Analyse van de beelden verkregen met zichtbaar licht (de als puntjes en vlekjes zichtbare melkwegstelsels, linksboven), die met röntgenstraling (de rode kogelvormige gebieden corresponderend met door elektromagnetische krachten afgeremde materie, rechtsboven) en het beeld verkregen uit de lenswerking op verder weg gelegen bronnen (blauwe gebieden, corresponderend met enkel voor gravitatie gevoelige materie, linksonder) geeft gesuperponeerd een verdeling van 4% ‘gewone’ materie met 0,5% daarvan sterren en ruim 20% onbekende materie die wel zwaartekracht voelt.*

te maken met Einstein’s algemene relativiteitstheorie waarin de ruimte-tijd structuur gekoppeld wordt aan de materie- en energie-inhoud van het heelal, is er meer nodig. Wat we zien aan bekende deeltjes blijkt dan maar het topje van de ijsberg te zijn van de massa- en energie-inhoud van het hele heelal, slechts 4% en daarvan maar zo’n 0,5% als sterren en 3,5% is niet-lichtgevend stof. Vervolgens is er nog zo’n 22% aan donkere materie, niet lichtgevend en niet bestaand uit bekende materie, maar wel gevoelig voor zwaartekracht (zie figuur 8.3). Het bestaan van deze massa werd al langer vermoed omdat die kan verklaren waarom de omloopssnelheid in de buitendelen van melkwegstelsels correspondeert met veel meer massa dan die van de sterren en stofwolken. Tenslotte is er dan nog een bijdrage van ruim 70% in de vorm van *donkere energie*, te vergelijken is met de uniforme energiedichtheid van een gasbel ten opzichte van omringende vloeistof. Het is deze laatste die nodig is om de waargenomen toename van de uitdijingsnelheid te krijgen. Over de aard en oorsprong daarvan tasten we letterlijk nog in het duister.

8.3 Kosmische straling

Met gemiddeld minder dan 1 atoom per m^3 zou je denken dat je het heelal leeg kunt noemen, zeker als je het vergelijkt met de 10^{29} atomen per m^3 op Aarde. Maar we hebben ook al gezien dat deze aantallen maar betrekkelijk zijn, want het worden al heel wat meer deeltjes als je fotonen meeneemt, ook al is dat niet allemaal zichtbaar licht, maar zijn het overwegend laag-energetische microgolven vanwege de kosmische achtergrondstraling. Bovendien is er al de nog onbekende materie.



Figuur 8.4: Behalve licht komt er nog heel wat meer op ons af vanuit de kosmos, wat onder andere blijkt uit metingen aan kosmische straling. Het energiespectrum loopt tot ruim 10^{20} eV per deeltje, ook al zijn dat er bij de hoogste energieën nog maar heel weinig. Maar die hebben wel zoveel energie dat ze een regen van secundaire deeltjes produceren die we met detectoren die kilometers uit elkaar staan kunnen waarnemen en met elkaar kunnen correleren. Daar kun je zelfs de richting uit reconstrueren, zoals gebeurt in HSPARC metingen waar diverse middelbare scholen in Nederland aan deelnemen.

(Deze data zijn in een compilatie gebruikt voor het artikel J. Cronin, T.K. Gaisser and S.P. Swordy, *Sci. Amer.* 276 (1997) 44).

Al in het begin van de vorige eeuw wist men dat de metalen plaatjes van een elektroscop, die uit elkaar gaan staan als er lading op wordt aangebracht, konden worden ontladen door een radioactief preparaatje in de buurt te brengen. Ook de Aarde en materialen om ons heen zenden deze straling uit en ontladen na enige tijd een elektroscop. Theodor Wulf, een jezuïet en natuurkunde-leraar in Valkenburg onderzocht dit effect door het apparaat mee te (laten) nemen naar de top van de Eiffeltoren, maar ook daar ging de ontlading vrolijk door en werd zeker niet minder. Victor Hess probeerde het daarna in ballonnen en kwam tot de conclusie dat het effect juist sterker werd op grote hoogte,

waarmee hij de ontdekker werd van de kosmische straling. Wij worden voortdurend gebombardeerd door deeltjes afkomstig van buiten de Aarde. Deze maken bij botsingen in de atmosfeer weer nieuwe deeltjes, zoals de kortlevende muonen. Dat we deze op de grond nog kunnen detecteren is een gevolg van de tijdsdilatatie die bij hoge snelheden, dicht bij de lichtsnelheid, optreedt. Een stilstaand muon leeft maar $2\ \mu\text{s}$, met de lichtsnelheid goed voor 600 m. Bij een voor muonen niet uitzonderlijke snelheid van 99,995% van de lichtsnelheid, zien wij hen maar liefst 100 keer langer leven. In die $200\ \mu\text{s}$ kunnen ze zo'n 60 km afleggen.

Juist de samenstelling van die kosmische straling (zie figuur 8.4) willen natuurkundigen en astronomen nu wel eens precies achterhalen. Deeltjesfysici hebben nog wel wat deeltjes in de aanbieding, deeltjes waarover ze speculeren als ze willen weten wat er ten grondslag ligt aan het standaard model. Misschien duiken er een paar op in de komende ronde van experimenten bij de Large Hadron Collider bij CERN in Genève. Dit zijn mogelijke kandidaten voor de donkere materie. Onderzoek met satellieten en ballonnen heeft al een tipje van de sluier opgelicht. Binnen grote foutenmarges lijkt de samenstelling van de kosmische straling tot 10^{17} eV (net voorbij de 'knie') op wat we kunnen verwachten als resultaat van de uitstoot van supernova explosies uit ons eigen melkwegstelsel, d.w.z. een samenstelling ongeveer identiek aan die van de materie in de buurt van de Zon, waaruit de planeten zijn gevormd. De knie in het spectrum wordt dan veroorzaakt doordat het mechanisme van deeltjesversnelling bij supernovae, het voortstuwen van deeltjes op het golf front van de explosie, niet 'langer' dan zo'n 100 000 jaar duurt.

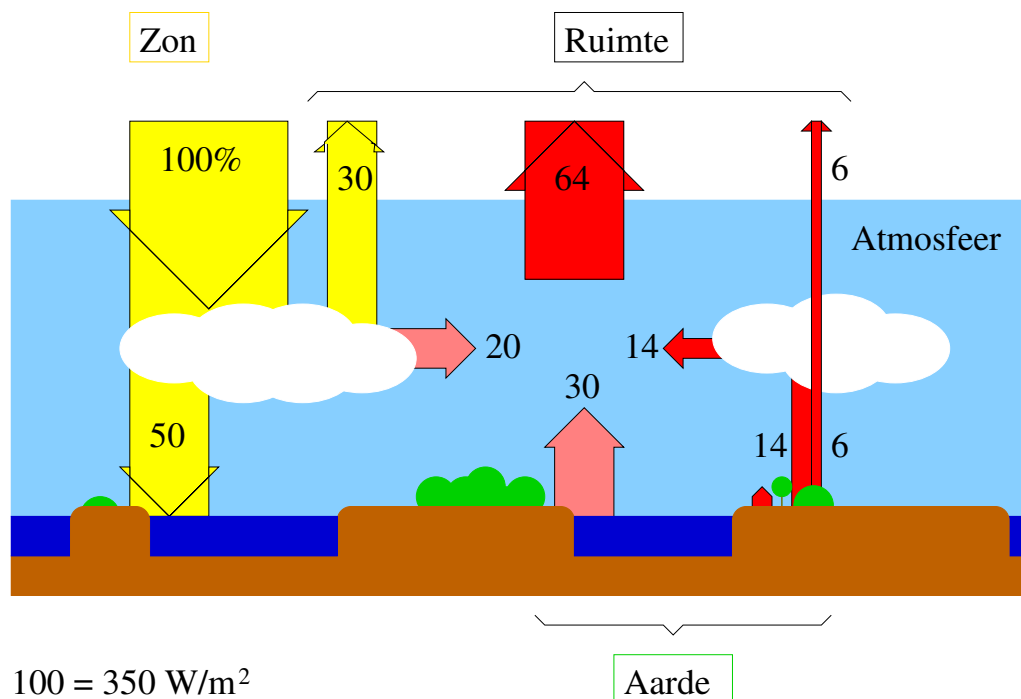
Zeker ook interessant is het om te weten waar deeltjes met de allerhoogste energieën vandaan komen. Probleem daarbij is dat protonen met energie van meer dan zo'n 10^{20} eV hun energie verliezen door botsingen met de fotonen van de achtergrondstraling. Maar misschien zijn er wel neutrino's met hogere energieën. Neutrino's worden bovendien niet afgebogen door magnetische velden in de interstellaire ruimte, iets wat wel gebeurt met protonen en elektronen. Om kosmische straling bij ultra-hoge energieën te meten wordt gezocht naar correlaties tussen secundair geproduceerde deeltjes over oppervlakken van vele duizenden km^2 , waaruit de energie en richting van het primaire deeltje bepaald kan worden. Voor het detecteren van de secundaire deeltjes wordt bijvoorbeeld weer gebruik gemaakt van door die deeltjes geproduceerde radiostraling (LOFAR en AUGER). Het ultieme blijft natuurlijk de achtergrondstraling van gravitatiegolven uit de kosmos te meten.

Hoofdstuk 9

Samen meer: complexiteit

In het voorgaande is een sterk reductionistische aanpak gebezigd. Maar dat is zeker niet het enige relevante in de natuurkunde. Met name als het aantal vrijheidsgraden toeneemt, bijvoorbeeld doordat we met veel deeltjes te maken hebben of omdat er voor deeltjes veel toestanden mogelijk zijn, komen er een allerlei andere aspecten aan de orde. Nog steeds blijven basisconcepten van groot belang. Bijvoorbeeld ook in een complex systeem als onze atmosfeer is het mogelijk de energiebalans op te maken (zie kader).

Energiebalans in atmosfeer



Van de ca. 1400 W/m^2 bij loodrechte inval (of van de gemiddelde inval van 350 W/m^2) komt 50% op Aarde. Ca. 30% wordt direct weerkaatst en 20% wordt geabsorbeerd. De Aarde raakt die warmte weer kwijt door verdamping (24%) en directe warmteafgifte (6%) en door het uitzenden van infrarode straling (20%), die grotendeels eerst weer wordt geabsorbeerd (14%), waarna alle opgenomen warmte in de atmosfeer (64%) uiteindelijk door de atmosfeer wordt uitgestraald als infrarode straling.

Terwijl voor één deeltje energiebehoud een rechtlijnige beweging met constante snelheid impliceert, moeten we daar anders mee omgaan bij een ensemble van deeltjes. Zelfs voor drie deeltjes die elkaar voelen via de zwaartekracht blijkt bijvoorbeeld de regelmaat in de onderlinge beweging te verdwijnen en krijgen we een chaotisch systeem. Dat wil zeggen een systeem waar een miniem verschil in de beginsituatie kan uitgroeien tot volledig verschillende eindsituaties. Weer en klimaat zijn hier ook prachtige voorbeelden van. Uit ervaring weten we echter ook wel dat er wel degelijk ook systematiek in complexe systemen te zien is. Ons zonnestelsel is bijvoorbeeld redelijk stabiel. Ook in weerpatronen is een heleboel regelmaat te zien. Dus ook in een op het eerste gezicht complex systeem, zoals de atmosfeer, is best orde te brengen in de chaos.

Entropie

Voor systemen met veel deeltjes komen we concepten tegen als *temperatuur* en *entropie*. Temperatuur, samenhangend met de gemiddelde kinetische energie per vrijheidsgraad, zijn we al tegengekomen bij de beschrijving van de geschiedenis van het heelal. In de thermodynamica is het aantal mogelijke toestanden waarin het systeem kan zijn een andere belangrijke grootte. Dit bepaalt de entropie van het systeem. Terwijl de energie van een afgesloten systeem niet verandert, kan de entropie juist niet afnemen (dus die blijft gelijk of neemt toe). Dat gebeurt zelfs als je dat op het eerste gezicht niet zou verwachten. In eerste instantie lijkt de biosfeer van de Aarde met daarop het leven een steeds geordender systeem te worden. Maar de biosfeer vormt zeker geen afgesloten systeem. Er komt energie binnen, voornamelijk van de Zon in de vorm van straling met golflengtes corresponderend met een Planck verdeling van 6 000 K. Er verdwijnt weer ongeveer evenveel energie, maar dat in de vorm van straling met golflengtes corresponderend met een Planck verdeling met veel lagere temperatuur van zo'n 300 K. Dat betekent onder meer veel meer fotonen. Kortom, inderdaad is de entropie van DNA veel lager dan dat van de afzonderlijke atomen waaruit het is opgebouwd. Toch neemt in het volledige systeem van biosfeer inclusief binnenkomende en uitgaande fotonen de entropie toe.

Afschattingen

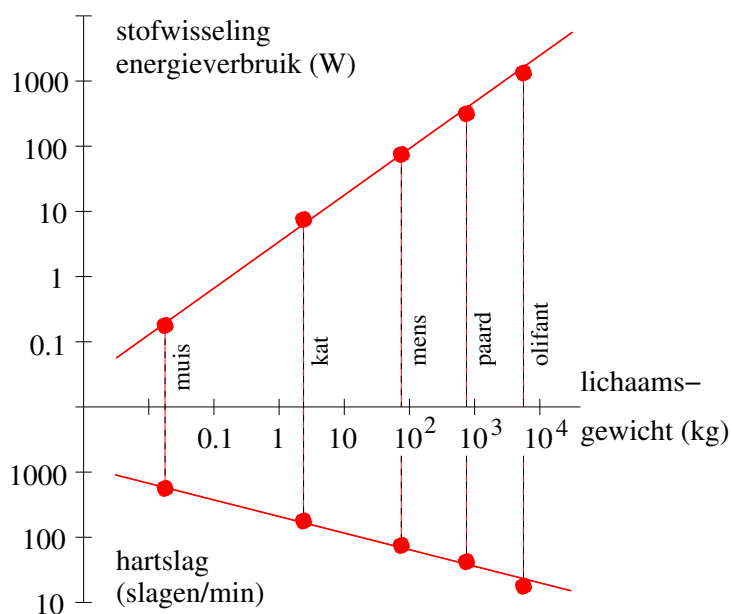
Voor complexe systemen zijn ook vaak afschattingen te maken; wat te verwachten? Zo spelen in planten, dieren en onze wereld chemische processen een essentiële rol. De energieën op microscopisch niveau van atomen en moleculen zijn van de orde van eV's. Wanneer we de elektronvolt met het getal van Avogadro vermenigvuldigen,

$$N_{\text{av}} \times (1 \text{ eV}) = 100 \text{ kJ},$$

krijgen we de energie die correspondeert met chemische processen in een dergelijke hoeveelheid moleculen, dat betekent afhankelijk van het molecuulgewicht in hoeveelheden van een tiental grammen of zo. Ons energieverbruik per dag voor de stofwisseling, 8 500 kJ, correspondeert dan met omzettingen in hoeveelheden van de orde van een kilogram, wat qua orde van grootte wel aardig lijkt te kloppen.

Wanneer we naar atoomkernen gaan, worden de ordes van grootte van de bindingsenergie (per nucleon) MeV's. Eenzelfde afschatting geeft via

$$N_{\text{av}} \times (1 \text{ MeV}) = 100 \text{ GJ},$$



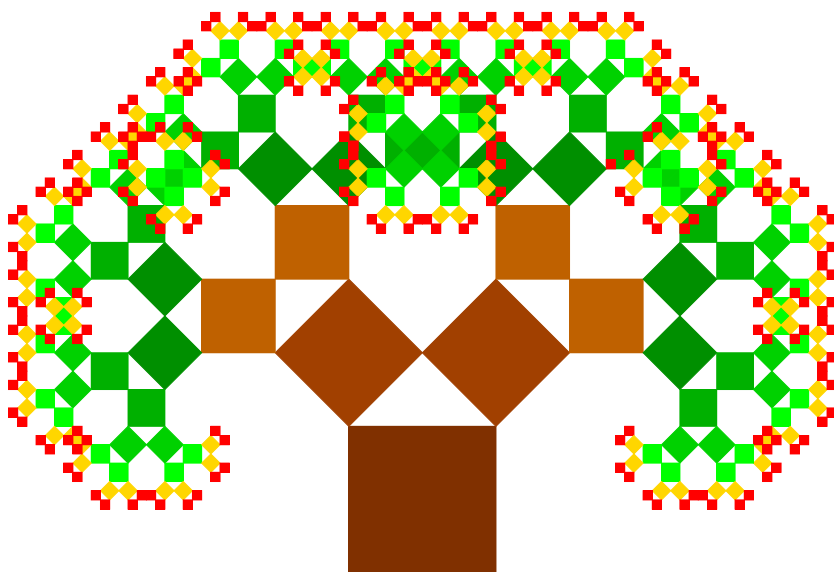
Figuur 9.1: *Het energieverbruik voor de (rust)stofwisseling bij zoogdieren als functie van het lichaamsgewicht (massa) is gegeven in nevenstaande figuur (boven), waarbij logaritmische schalen zijn gebruikt. Het verband laat zien dat het energieverbruik groeit als $M^{3/4}$. Het neemt dus toe, maar niet evenredig met het lichaamsgewicht. De hartslag neemt juist af als $M^{-1/4}$, grafisch weergegeven in het onderste deel van de figuur.*

wat dan correspondeert met de energie die per gram materiaal is te winnen via kernsplijting in reactoren. Dit is van de orde van grootte van het jaarverbruik van een persoon, wat met 10 kW verbruik uit zou komen op 300 GJ. Voor veel meer informatie over ‘energie’ verwijs ik naar het boek van J. Hermans.

Schaalwetten

Ook blijken er tussen complexe systemen vaak verrassend eenvoudige relaties te zijn, die soms een direct gevolg zijn van ‘gezond verstand gebruiken’, maar die soms op onderliggende principes duiden. Een bekend voorbeeld van gezond verstand gebruiken is de relatie tussen pootdiktes van muizen en olifanten, die allermindst in properties staan tot de typische lineaire afmetingen (lengte, breedte of hoogte). Maar dat is logisch zal iedereen zeggen: om niet door de poten te zakken zal het pootoppervlak evenredig met het gewicht Mg moeten toenemen, en dus de poot-diameter met de wortel van de massa M . De massa zal met het volume toenemen en dat gaat ruwweg als de derde macht van de lineaire afmeting L , dus pootdiameter $\sim M^{1/2} \sim L^{3/2}$. Bijvoorbeeld een olifant is wat hoogte/lengte/breedte betreft zo’n 64 maal groter dan een muis, waarbij we de faktor $64 = 2^6$ voor het gemak hebben genomen (zeg orde van 5 m tegenover 8 cm). Dat correspondeert met een volume en massaverhouding van $64 \times 64 \times 64 = 2^{18}$, ruim 16 000 (zeg orde van 5 000 kg tegenover 30 gram). Volgens bovenstaande schaalwet verwachten we een verhouding van pootdiameter van $2^9 \approx 500$ (zeg 0,5 - 1 meter tegen 1 - 2 mm), wat inderdaad redelijker klinkt dan wat je krijgt door een eenvoudig schaling met de lengteverhouding van 64, wat voor een tot olifanten-afmetingen ‘opgeschaalde’ muis een pootdiameter van 6,5 - 13 cm zou opleveren. De opgeschaalde muis zou dan ook door zijn poten zakken.

Maar er zijn ook een heleboel universele schaalwetten voor ‘levende wezens’ die niet vanzelfsprekend zijn en die biologen *en* fysici bezig houden (zie bij literatuur genoemde artikel van G.B. West). Een voorbeeld is het verband tussen het energieverbruik voor de ruststofwisseling en het lichaamsgewicht, geïllustreerd in figuur 9.1. Dit voor zoogdieren door Max Kleiber al in 1932 beschreven verband kan zelfs worden doorgetrokken naar koudbloedige dieren en eencellige organismen, al zijn er daar nog wel discussies gaande



Figuur 9.2: *De boom van Pythagoras laat zien, hoe een eenvoudig zich zelf herhalend voorschrift een complexe structuur kan opleveren.*

over de precieze relatie. Zonder hier verder in te gaan op dit soort schaalwetten, is het wel interessant om te kijken naar combinaties van dit soort relaties. Combinatie van de toename van energieverbruik als $M^{3/4}$ en afname van hartslag als $M^{-1/4}$ levert de interessante conclusie op dat de voor de ruststofwisseling benodigde energie per hartslag evenredig met M toeneemt, niet onlogisch toch. Een andere interessante combinatie is de afname van de hartslag met $M^{-1/4}$, die ongeveer gecompenseerd wordt met eenzelfde toename van levensduur met $M^{1/4}$, met als eindresultaat dat het totaal aantal hartslagen gedurende een leven gaat als $M^0 = 1$, d.w.z. onafhankelijk is van M , oftewel het totaal aantal hartslagen gedurende het leven is voor alle zoogdieren ruwweg hetzelfde.

Andere prachtige voorbeelden van schaalwetten zijn die tussen spanwijdte van vleugels, snelheden en massa's van vogels, relaties waar ook vliegtuigen niet onderuitkomen (zie boek van H. Tennekes).

Patronen, topologie, fractale dimensie, zelf-organisatie, ...

Er zijn nog een heleboel andere aspecten die samenhangen met complexiteit. Bijvoorbeeld, patroonvorming en de daaraan ten grondslag liggende principes. Zo is de boom van Pythagoras (zie figuur 9.2) een voorbeeld van complexiteit waar een uitermate simpel voorschrift aan ten grondslag ligt. Cellulaire automaten, zoals systemen van 'cellen' waarin het 'overleven van cellen' aan hun omgeving gekoppeld wordt, kunnen prachtige complexen opleveren. Anderzijds kunnen ingewikkelde structuren (bijvoorbeeld knopen) in een beperkt aantal klassen worden ingedeeld. Aan zich herhalende en verfijnende structuren, zoals kustlijnen of groeiende clusters kunnen fractale dimensies worden toegekend. Het vouwen van DNA, de spiraalstructuur van melkwegstelsels, allemaal voorbeelden van structuren waar we zeker nog niet uit zijn.

Fascinerend is dat elementaire principes en natuurwetten bruikbaar en geldig zijn van klein tot groot, van atoom tot kosmos, welke kant je ook omgaat.

Referenties

- Wie een overzicht wil van historische ontwikkelingen in de 20^e eeuw doet er goed aan het boek te lezen van A. Pais, *Inward Bound; Of Matter and Forces in the Physical World*, Oxford University Press (ISBN 0-19-851997-4).
- Een boek waarin diverse ontwikkelingen in de deeltjesfysica de revue passeren is M. Veltman, *Facts and Mysteries in Elementary Particle Physics*, World Scientific (ISBN 981-238-149-X); vertaling: *Feiten en mysteries in de deeltjesfysica*, deel 78 van de Wetenschappelijke Bibliotheek van Natuurwetenschap & Techniek (ISBN 978-90-76988-44-7).
- B. Bryson, *A Short History of Nearly Everything*, Broadway Books, New York (ISBN 0767908171); vertaling: *Een kleine geschiedenis van bijna alles*, Uitgeverij Atlas (ISBN 978-90-450-0970-6).
- Een goede bron, zowel voor inhoudelijke informatie als achtergrond is te vinden op de Nobelprijs-webpagina <http://www.nobelprize.org>.
- Sander Bais, *De natuurwetten; iconen van onze kennis*, Amsterdam University Press Salomé, 2005 (ISBN 978-90-5356-714-3): een andere kijk op de vergelijkingen die gebruikt worden om natuurwetten op te schrijven.
- J.A. Wheeler, *A Journey into Gravity and Spacetime*, Scientific American Library (ISBN 0-7167-5016-3); vertaling: *Zwaartekracht: het verband tussen massa, ruimte en tijd*, deel 26 van de Wetenschappelijke Bibliotheek van Natuur & Techniek (ISBN 978-90-73035-09-0).
- Bij ontwikkelingen op het gebied van de natuurkunde in Nederland, speelt de Nederlandse Natuurkundige Vereniging (NNV) een centrale rol (zie <http://www.nnv.nl>). In het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde (NTvN) verschijnen artikelen over deze ontwikkelingen, maar ook overzichtsartikelen, bijv. hoofdstuk 7 is een bewerking van K.J.F. Gaemers en P.J. Mulders, *De zon, het neutrino en zijn massa*, NTvN 68 (2002) 374-375.
- Meer over neutrinos in een bredere context is te vinden in het artikel van P.J. Mulders en J.W. van Holten, *Neutrino's en de grenzen van het standaardmodel*, NTvN 87 (2021) 12-15.
- Het tijdschrift *EPS News* van de overkoepelende European Physical Society (EPS) en de tijdschriften van zusterverenigingen van de NNV, zoals *Physics Today* van de American Physical Society (APS) en *Physics World* van het Britse Institute of Physics (IOP) brengen ook uitstekende overzichtsartikelen.

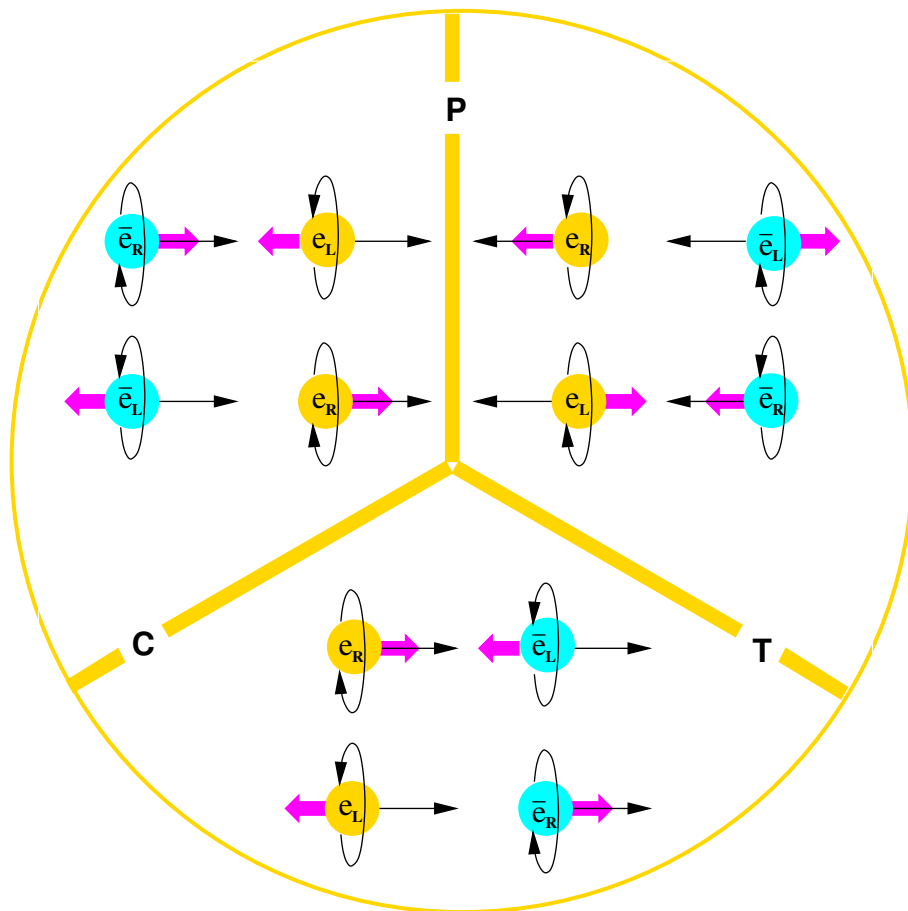
- Tabellen van elementaire deeltjes en hun eigenschappen zijn te vinden op de website van de ‘particle data group’ <http://pdg.lbl.gov>. De websites van versneller-instituten zoals <http://www.cern.ch> van het CERN in Genève bieden inzicht in ontwikkelingen op het gebied van de elementaire deeltjesfysica. CERN geeft via het IOP bovendien het zeer informatieve blad *CERN Courier* uit.
- In Nederland zijn de activiteiten op het gebied van de elementaire deeltjesfysica gebundeld in het samenwerkingsverband NIKHEF (Nationaal Instituut voor Sub-atomaire Fysica), waarin een aantal universiteiten en de Nederlandse organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) samenwerken.
- Een van de bekendste ‘geschiedschrijvingen’ van het heelal is die van S. Weinberg, *The First Three Minutes* (Bantam books, 1980); vertaling: De eerste drie minuten (Natuur en Techniek, 1983).
- Inzicht in energie en uitzicht voor de toekomst komt aan de orde in het boek van J. Hermans, *Energie survival gids*, BetaText (ISBN 978-9075541113).
- Over schaalwetten in de biologie is veel meer te vinden in het artikel van G.B. West en J.H. Brown, *Life’s Universal Scaling Laws*, Physics Today 57-9 (2004) 36-42.
- Over schaalwetten voor vogels en vliegtuigen gaat het boek van H. Tennekes, *De wetten van de vliegekunst*, Aramith (ISBN 978-9068340952).

Hoofdstuk 10

Nog wat extra materiaal

VAN ATOOM TOT KOSMOS

Wie het kleine niet eert ...



Vragen en problemen
(inclusief oplossingen)

10.1 Inleiding

De secties in dit hoofdstuk corresponderen met de eerdere hoofdstukken en bevatten extra materiaal in de vorm van vragen en problemen, inclusief daarbij de oplossingen.

10.2 De basis concepten

10.2.1 Niet-commuterende rotaties

Rotaties zijn voorbeelden van transformaties waar de volgorde van toepassen belangrijk is.

- (a) Roteer in een x-y-z assenstelsel de z-as eerst om de x-as over 90° , gevolgd door een rotatie om de y-as over 90° . Doe hetzelfde, maar dan eerst de rotatie om de y-as, gevolgd door de rotatie om de x-as. Is het resultaat hetzelfde? Of anders geformuleerd: zijn rotaties commutatief?

(oplossing)

Het resultaat is verschillend. Expliciet:

$$\hat{z} \xrightarrow{R_x(90)} -\hat{y} \xrightarrow{R_y(90)} -\hat{y}; \quad \hat{z} \xrightarrow{R_y(90)} \hat{x} \xrightarrow{R_x(90)} \hat{x}.$$

- (b) Voor wie dit graag met matrices doet geven we de rotaties als 3×3 matrices,

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

zodat je expliciet $[R_x, R_y] = R_x R_y - R_y R_x$ kunt berekenen en laten zien dat $[R_x, R_y] = R_z$.

(oplossing)

Het resultaat is verschillend. Expliciet:

$$R_x R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_y R_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- (c) Laat zien dat $(R_x R_y) R_z = R_x (R_y R_z)$.

(oplossing)

Het resultaat is nu identiek,

$$\begin{aligned} (R_x R_y) R_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ R_x (R_y R_z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Dit is een voorbeeld van associativiteit van rotaties.

10.2.2 Energie en onze atmosfeer

Het volgende stukje is de inleiding van het artikel ‘Wat beweegt de atmosfeer?’ van Peter Siegmund (TU Eindhoven), NTvN 73, no. 7 (2007) 240:

De intensiteit van de inkomende zonnestraling aan de top van de atmosfeer bedraagt gemiddeld 350 W/m^2 . [...] De zon verliest door kernfusie per seconde een massa van twee kilo om het vermogen aan zonne-energie te maken dat door de Aarde wordt onderschept. Dit is zo’n tienduizend keer zoveel als de huidige wereldwijde energieconsumptie, die gemiddeld per persoon neerkomt op 2500 W – een flinke waterkoker. Wolken weerkaatsen 30% van de inkomende zonnestraling en de atmosfeer absorbeert 20%. De Aarde absorbeert de rest. Die energie raakt de Aarde weer kwijt door verdamping (24%), directe warmteafgifte aan de atmosfeer (6%) en door het uitzenden van infrarode straling (20%). Deze infrarode straling wordt grotendeels (14%) geabsorbeerd door de atmosfeer, vooral door waterdamp en kooldioxide (het ‘broeikaseffect’). De verdampingsenergie komt in de atmosfeer vrij in de vorm van warmte als de waterdamp condenseert. Van de inkomende zonnestraling wordt dus uiteindelijk $(20+24+6+14=)64\%$ opgenomen door de atmosfeer. De atmosfeer verliest deze energie weer door het uitzenden van infrarode straling. Wereldwijd gemiddeld heerst aan de top van de atmosfeer stralingsevenwicht: de netto ingaande zonnestraling $(100-30=70\%)$ is even groot als de uitgaande infrarode straling $(20-14+64=70\%)$.

- (a) De energiestroom van de Zon is $I_0 = 1400 \text{ W/m}^2$. Hoe correspondeert dat met bovenstaande gemiddelde intensiteit van 350 W ?

(oplossing)

De dwarsdoorsnede van de Aarde gezien vanaf de zon is πR^2 . Dit oppervlak absorbeert de energie, maar het wordt verdeeld over het hele aardoppervlakte, dus op $4\pi R^2$, vandaar een factor $1/4$.

- (b) Controleer de getallen in het stukje over het massaverlies van de zon.

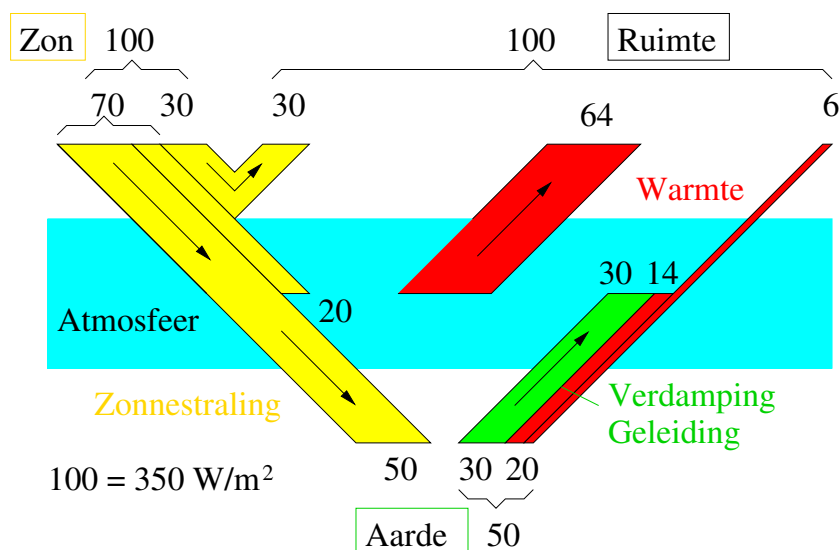
(oplossing)

Met $R = 6000 \text{ km}$, vinden we voor het vermogen dat de Aarde opvangt $\pi R^2 I_0 \approx 1,6 \cdot 10^{17} \text{ W}$. Dit geeft het aantal Joules per seconde. Een evengrote hoeveelheid energie mc^2 krijg je uit een massa $m \approx 1,8 \text{ kg}$. Let wel dit is het massaverlies voor de energie die op Aarde terechtkomt. Het totale massaverlies is $4R_{A-Z}^2/R^2 \approx 2,5 \times 10^9$ meer, dus zo’n 5 miljard kg.

- (c) Probeer deze inleiding te illustreren met een diagram.

(oplossing)

De energiestromen in de atmosfeer zijn in hoofdstuk 9.1 besproken omdat het bij uitstek een complex systeem betreft. Om het uitgangspunt dat inkomende en uitgaande energie gelijk zijn, te illustreren hieronder nog een representatie.. De hoeveelheid energie die daadwerkelijk onttrokken wordt (bv. door planten die uiteindelijk tot steenkool worden) of die daadwerkelijk aan het systeem worden toegevoegd zoals opgewekte energie in centrales, is verwaarloosbaar in deze balans



10.2.3 Klassieke gravitatiebanen

- Wat zijn de kracht, massa en de versnelling die we in $F = ma$ moeten gebruiken om de in hoofdstuk 2 genoemde relatie tussen afstanden van planeten tot de Zon (R) en hun omlooptijd om de Zon (T) te bepalen.
- Wat is de constante R^3/T^2 in AE^3/jr^2 en wat in mks eenheden. Wat kunnen we hieruit afleiden?

(oplossing)

Als we de gravitatieconstante G kennen, kunnen we hier de massa van de zon uit bepalen.

- Hoe kunnen we de massa van de Aarde bepalen?

(oplossing)

Dat kan bijvoorbeeld door gebruik te maken van de afstand Aarde-Maan (ca. 384 000 km) en de omlooptijd van de Maan (ca. 27,3 dagen).

- Bereken de som van kinetische en potentiële energie voor een planeet die op afstand R om de Zon beweegt.

(oplossing)

De energie is de som van kinetische en potentiële energie,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R},$$

Uit de gelijkstelling van gravitatiekracht aan centripetale kracht volgt

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{R}.$$

Dus we vinden

$$E = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R}.$$

De energie is negatief wat aangeeft dat het systeem ‘gebonden’ is.

- (e) Voor een ellipsbaan gelden min of meer dezelfde relaties, maar met straal R vervangen door de halve grote as a . De centrale massa (zwaartepunt) bevindt zich in het brandpunt van de ellips en de afstand tot het brandpunt heeft een minimumwaarde van $r_{\min} = a(1 - e)$ en een maximumwaarde van $r_{\max} = a(1 + e)$, waar e de excentriciteit van de ellipsbaan is.

De ster S2 waarvan de baan om Sagittarius A* is gemeten heeft als parameters $a = 970$ AE (Astronomische Eenheid gelijk aan de a van de aardbaan, $1 \text{ AE} = 149,6 \times 10^6 \text{ km}$), een excentriciteit $e = 0,88$ (minimale afstand dus ca 120 AE) en een omlooptijd van 16,0518 yr. Bereken hiermee de massa van het object waar S2 omheen draait (het superzware zwarte gat in ons Melkwegstelsel).

(oplossing)

We hebben alleen a en T nodig. Vergeleken met onze Aarde en de Zon, hebben we:

$$\text{Aarde: } \frac{a^3}{T^2} = \frac{1^3}{1^2} \frac{\text{AE}^3}{\text{yr}^2} \quad \text{en voor S2: } \frac{a^3}{T^2} = \frac{970^3}{16,05^2} = 3,54 \times 10^6 \frac{\text{AE}^3}{\text{yr}^2}.$$

Dus we vinden voor het superzware zwarte gat $M_{\text{BH}} = 3,54 \times 10^6 M_{\text{Zon}}$.

10.2.4 Potentialen in ruimte voor willekeurige dimensies

De potentiële energie is een functie van de positie, waaruit we door te differentiëren (afgeleides nemen) de kracht vinden, $\mathbf{F} = -\nabla U$. We gaan nu $\nabla = (\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz})$ ook bekijken voor andere dimensies dan drie, specifiek voor $D = 1, 2, 3, 4$.

- (a) We bekijken eerst het volume van de ‘bol’ in verschillende dimensies. Hiervoor gebruiken we poolcoördinaten, met straal r waarbij $r^2 = x^2 + y^2 + \dots$ en een aantal hoeken. Daarmee kunnen we ‘volumes’ uitrekenen door te integreren,

$$\begin{aligned} D = 1 : & \int_{-R}^R dx, \\ D = 2 : & \int_{\text{bol}} dx dy = \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\varphi, \\ D = 3 : & \int_{\text{bol}} d^3x = \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi, \\ D = 4 : & \int_{\text{bol}} d^4x = \int_0^R dr r^3 \int_0^\pi d\vartheta_2 \sin^2 \vartheta_2 \int_0^\pi d\vartheta_1 \sin \vartheta_1 \int_0^{2\pi} d\vartheta_0. \end{aligned}$$

Dit is eenvoudig te generaliseren en we kunnen bijvoorbeeld de ‘volumes’ berekenen met als algemeen resultaat

$$\text{Volume} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^R dr r^{D-1} = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D+2}{2})} R^D.$$

Hier is de gamma functie $\Gamma(z)$ de veralgemening van $\Gamma(n+1) = n! = 1.2 \dots n$ met in het algemeen $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ en specifiek $\Gamma(0) = \Gamma(1) = 1$ en $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} = \pi^{1/2}$.

Je kunt nu de ‘volumes’ van bollen checken voor verschillende dimensies, bijvoorbeeld Volume (D=1) = $2R$ (lengte van lijnstuk of doorsnede), Volume (D=2) is πR^2 (oppervlakte van cirkel), Volume (D=3) = $\frac{4\pi}{3} R^3$ (volume 3-bol) en Volume (D=4) = $\frac{1}{2}\pi^2 R^4$ (volume 4-bol).

- (b) Na deze excursie naar volumes en integreren gaan we terug naar differentiëren met een potentiaal en dan specifiek een centrale potentiaal, die alleen van de afstand tot een centrum afhangt. De kracht is zoals besproken in hoofdstuk 2 gerelateerd aan de potentiaal via de afgeleide. Specifiek hebben we voor elk van de coördinaten

$$\frac{\partial U(r)}{\partial x} = \frac{dU(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{dU}{dr} \implies \mathbf{F}(r) = -\nabla U = \hat{\mathbf{r}} F(r) = \hat{\mathbf{r}} \frac{dU}{dr}$$

en dus een radiële kracht. Voor zowel gravitatie als voor elektromagnetisme hangt de potentiaal samen met een verdeling van de bijbehorende lading. Voor gravitatie is dat een massaverdeling, voor elektromagnetisme een verdeling van elektrische lading. Laten we de ‘soort’ lading even in het midden en kijken we alleen naar de verdeling $\rho(r)$ dan hangt die samen met de potentiaal via de Poisson vergelijking,

$$\nabla^2 U(r) = \rho(r) \implies \frac{1}{r^{D-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{D-1} \frac{d}{dr} \right) U(r) = \rho(r).$$

Leidt hieruit voor $D = 1, 2, 3$ en 4 af wat de afhankelijkheid van de potentiaal $U(r)$ en $F(r)$ van de straal af als de lading in een punt geconcentreerd of meer algemeen als we ons ‘buiten’ de ladingsverdeling bevinden.

(oplossing)

Als we ons ‘buiten’ de lading bevinden is de lading binnen de bolschil met straal R ,

$$Q(R) = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^R dr r^{D-1} \rho(r) = Q$$

We vinden dan uit bovenste vergelijking dat

$$R^{D-1} F(R) = -\frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{2\pi^{D/2}} Q,$$

en rekening houdend met vrijheid van integratie-constante voor $U(r)$

$$\begin{aligned} D = 1 : F(r) &= -\frac{1}{2}Q \text{ and } U(r) = \frac{1}{2}Qr, \\ D = 2 : F(r) &= -\frac{Q}{2\pi r} \text{ and } U(r) = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \\ D = 3 : F(r) &= -\frac{Q}{4\pi r^2} \text{ and } U(r) = -\frac{Q}{4\pi r}, \\ D = 4 : F(r) &= -\frac{Q}{2\pi^2 r^3} \text{ and } U(r) = -\frac{Q}{4\pi^2 r^2}. \end{aligned}$$

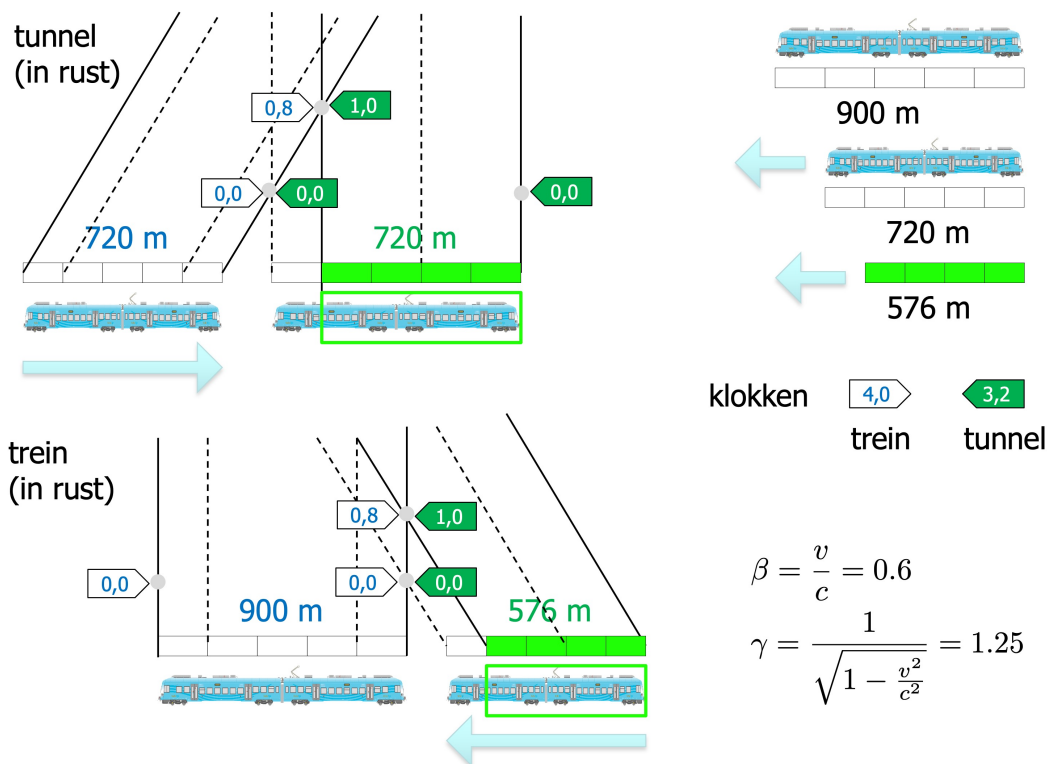
Het geval $D = 2$ markeert de overgang van het domein waar de potentiaal naar nul neigt, op korte afstanden in één dimensie naar juist heel grote afstanden in drie dimensies.

10.3 Het theoretisch fundament

10.3.1 Diagrammatische representatie van snelle trein in tunnel

We bekijken tijd-dilatatie en ruimte-contractie voor een trein die door een tunnel beweegt. De trein is 900 m lang en de tunnel is 720 m lang. De tunnel heeft 2 sporen en op het ene spoor staat een trein, ook 900 m lang stil. Van die trein bevindt zich dus 180 m buiten de tunnel. We bekijken het probleem allereerst vanuit de tunnel, waar een stilstaande trein van 900 m staat en de andere trein komt aanstormen met $0,6c$ (zestiende van de lichtsnelheid, 180 m in $1 \mu s$). Gezien vanuit de bij tunnel staande waarnemer lijkt de lengte van de bewegende trein slechts 720 m, precies de lengte van de tunnel! Op tijdstip $0,0$ passeert de rijdende trein het uitstekende eindpunt van de stilstaande trein. Met de snelheid van $0,6c$ gaat de trein na $1,0 \mu s$ de tunnel in en komt er na $5,0 \mu s$ weer uit. Het lijkt alsof we de trein zouden kunnen opbergen in de tunnel, als die bij exit abrupt stopt (laten we even aannemen dat dit abrupt stoppen kan!). Zit de trein nu in de tunnel? Het zou vreemd zijn, want als we het omdraaien ziet de machinist van de trein de tunnel op zich afkomen met $0,6c$, maar die is slechts 576 m lang. De stilstaande trein is 720 m lang. Wat gebeurt er als de machinist inderdaad de trein bij exit stilzet. Hij doet dit door de trein in z'n geheel $3,2 \mu s$ na binnengaan van tunnel stil te zetten, dat is $4,0 \mu s$ na passeren van eindpunt van stilstaande trein.

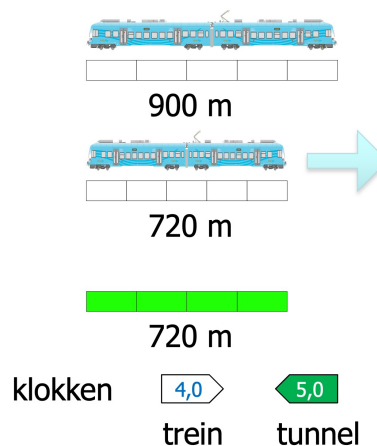
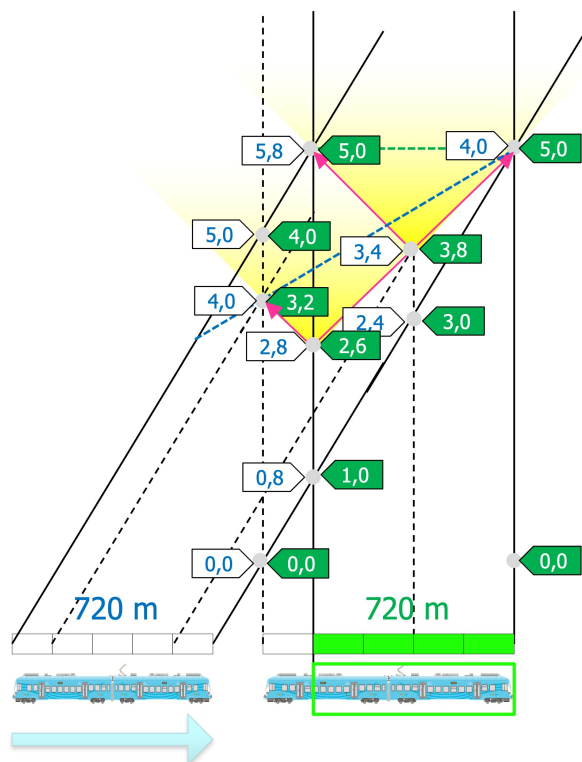
Schets de situaties en klokstanden voor waarnemer bij tunnel en voor de machinist. Dat maakt het mogelijk om het geheel te begrijpen. Hieronder beide startpunten.



(oplossing)

De oplossing voor het systeem waar de tunnel in rust is, is gegeven in de volgende figuur. De uitgangspunten zijn dat voor tunnel en stilstaande trein horizontale lijnen dezelfde

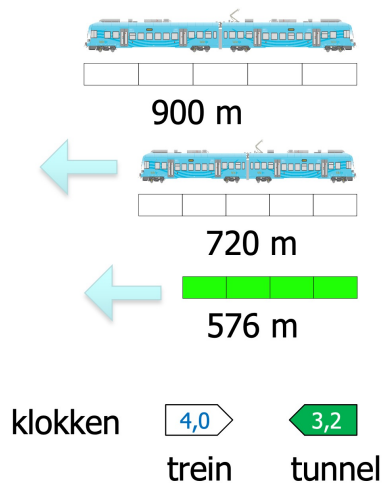
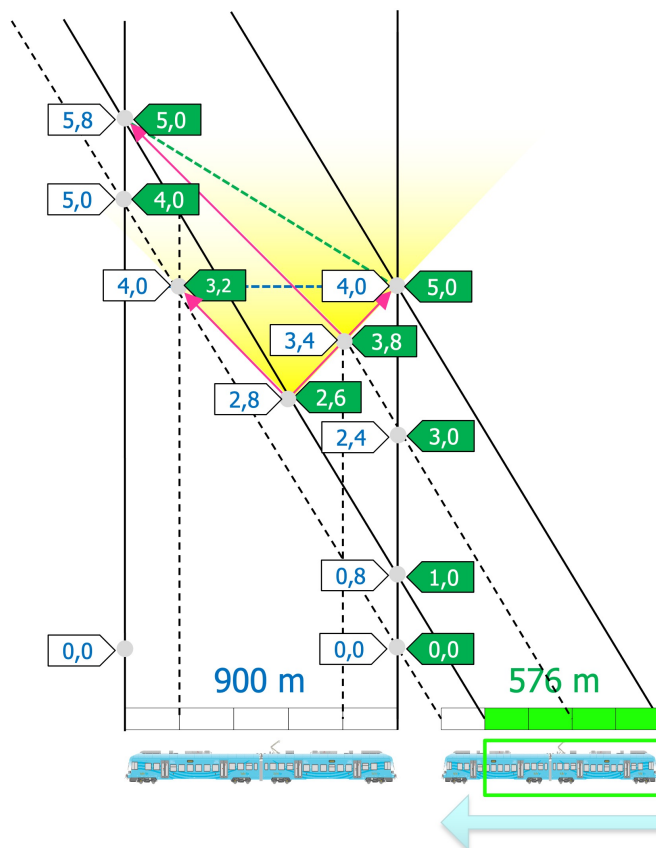
tunnel-tijden hebben, terwijl de trein-tijden op de klokken in de trein en voor de machinist langzamer lopen. De rest is een beetje puzzelen.



$$\beta = \frac{v}{c} = 0.6$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1.25$$

De oplossing voor de trein in de tunnel gezien vanuit de waarnemer in de trein is gegeven in de volgende figuur. Nu zijn de trein-tijden op horizontale lijnen gelijk en loopt de tunnel-tijd langzamer.



$$\beta = \frac{v}{c} = 0.6$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1.25$$

Om het verhaal te complementeren zijn ook nog wat lichtsignalen gegeven met 'toekomst' gebieden (geel).

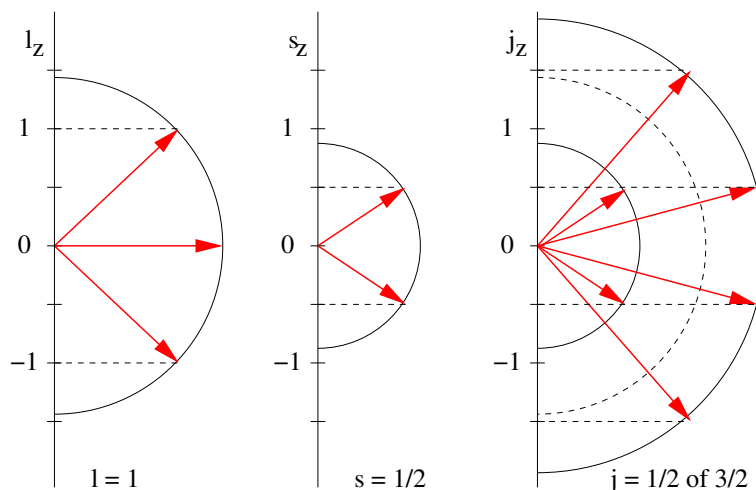
10.3.2 Kwantisatie van impulsmomenten

De mogelijke waarden van het baanimpulsmoment om een bepaalde as zijn gekwantiseerd in veelvouden van $\hbar$. Wanneer $L \gg \hbar$ dan lijkt het of het impulsmoment $L = mvr$ bij een rotatie alle mogelijke waarden kan hebben (een continuüm), de klassieke situatie van een tol of een aan een touw rondslingerende massa. Voor een in een atoom ronddraaiend elektron werkt dat niet meer. Afhankelijk van de baan heeft het elektron een bepaald impulsmoment ℓ en de orientatie van de baan is zodanig dat gezien langs de z-as het impulsmoment alleen veelvouden van $\hbar$ aanneemt, bijvoorbeeld voor $\ell = 1$ hebben we $\ell_z = m_\ell \hbar$ met $m_\ell = 1, 0$ of -1 , corresponderend met drie mogelijke kwantumtoestanden. Het elektron heeft daarnaast nog een intrinsiek impulsmoment, spin genoemd, dat de waarde $s = 1/2$ heeft en dat twee mogelijke projecties langs de z-as toelaat (twee kwantumtoestanden), $s_z = m_s \hbar$ met $m_s = 1/2$ of $-1/2$.

- (a) Geef het aantal kwantumtoestanden bij een gegeven impulsmoment ℓ (of s) door te kijken hoeveel ℓ_z -waarden mogelijk zijn als de maximale en minimale waarden $m_\ell = \ell_z/\hbar = \pm\ell$ (of $m_s = s_z/\hbar = \pm s$) zijn en alleen stapjes ter grootte van $\hbar$ mogelijk zijn.

(oplossing)

Er zijn dan in het algemeen $2\ell + 1$ impulsmomenttoestanden, bv. bij $\ell = 1$ met waarden $m_\ell = \ell_z/\hbar = 1, 0$ en -1 . Idem voor spin hebben we in het algemeen $2s + 1$ toestanden, bv. voor $s = 1/2$ met $m_s = s_z/\hbar = 1/2$ en $-1/2$. Dit is geïllustreerd in de linker twee figuren in het volgende schema,



- (b) Om het baanimpulsmoment van een elektron te combineren met de spin, tellen we de impulsmomenten op. Omdat voor zowel baanimpulsmoment als spin de waarden ℓ_z en s_z gekwantiseerd zijn, vinden we voor $j_z = \ell_z + s_z$ ook discrete mogelijkheden. Welke en hoeveel? Laat zien dat de mogelijke waarden voor $m_j = j_z/\hbar$ juist degene zijn die horen bij $j = 3/2$ en $j = 1/2$, zodat we de 'optelling'

$$1 \otimes 1/2 = 3/2 \oplus 1/2$$

hebben. Dit is een symbolische schrijfwijze.

(oplossing)

De volgende waarden zijn mogelijk:

$m_\ell = \ell_z/\hbar$	$m_s = s_z/\hbar$	$m_j = j_z/\hbar$
1	1/2	3/2
1	-1/2	1/2
0	1/2	1/2
0	-1/2	-1/2
-1	1/2	-1/2
-1	-1/2	-3/2

We zien 6 mogelijke toestanden, met als hoogste waarde $m_j = j_z/\hbar = 3/2$. Samen met toestanden $m_j = 1/2, -1/2$ en $-3/2$ vormen dat de vier toestanden met $j = 3/2$. Blijven over twee toestanden met $m_j = 1/2$ en $-1/2$, die bij $j = 1/2$ horen (zie rechterfiguur hierboven).

- (c) Combineer op eenzelfde manier de spin van twee elektronen tot een totale spin, $S_z = s_{1z} + s_{2z}$. Laat zien dat we (symbolisch) krijgen

$$1/2 \otimes 1/2 = 0 \oplus 1.$$

(oplossing)

De mogelijke toestanden zijn:

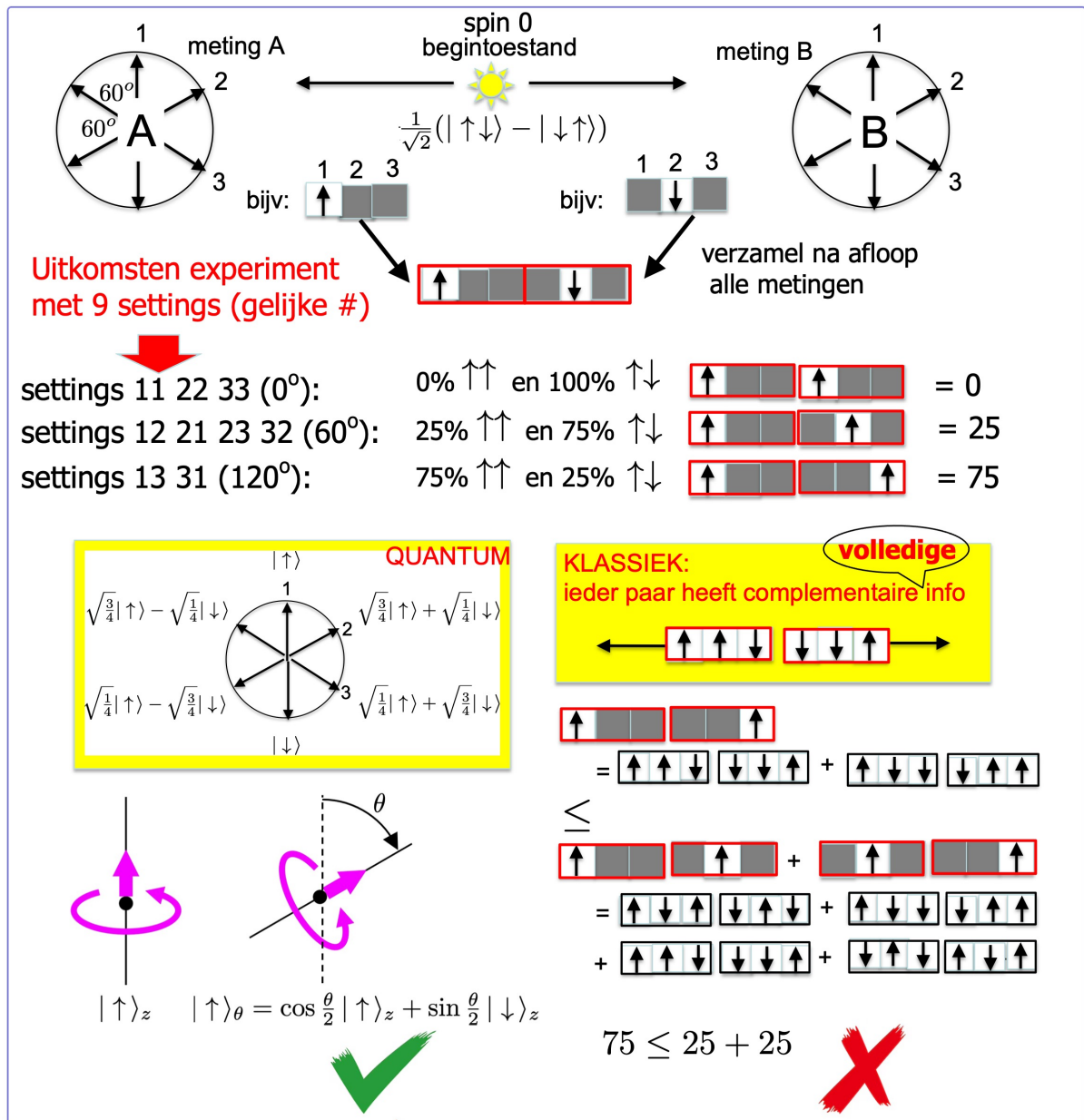
$m_\ell = \ell_z/\hbar$	$m_s = s_z/\hbar$	$m_j = j_z/\hbar$
1/2	1/2	1
1/2	-1/2	0
-1/2	1/2	0
-1/2	-1/2	-1

We zien 4 mogelijke toestanden, met als hoogste waarde $m_S = S_z/\hbar = 1$. Samen met toestanden $m_S = 0$ en -1 vormen dat de drie toestanden met $S = 1$. Blijft over een toestand met $m_S = 0$.

10.3.3 De Einstein-Podolski-Rosen paradox

We bespreken de Einstein-Podolski-Rosen (EPR) paradox en de Bell ongelijkheden, die ons in staat stellen om de unieke aspecten van de kwantummechanica te zien. Dat doen we in een aantal stappen die ook geïllustreerd zijn in bijgaande kader.

In het experiment worden twee spin $1/2$ deeltjes met tegengestelde spins geproduceerd, bijvoorbeeld de producten van een vervallend deeltje zonder spin. Deze deeltjes vliegen in tegenovergestelde richtingen weg en bij A en B worden de spins gemeten langs een richting, waarbij voor de spin-oriëntatie een Stern-Gerlach apparaat beschikbaar is dat 3 mogelijke standen (1, 2 of 3) heeft waarbij gemeten wordt of de spin langs verticale richting staat (stand 1), onder 60° (stand 2) of onder 120° (stand 3). Nu wordt de beslissing wat gemeten gaat worden pas genomen als deeltjes bijna bij het meetapparaat zijn. De resterende tijd is in ieder geval zo kort dat er geen signaal meer kan worden verstuurd tussen A en B om meetrichtingen door te geven. Dus de meetrichtingen zijn onafhankelijk van elkaar en onafhankelijk van het vertrekpunt! De resultaten van de metingen worden aangegeven als in de 2 voorbeelden bij A en B, in de figuur is meting A in stand 1 en het resultaat is $\uparrow$, de meting van B is in stand 2 en het resultaat is $\downarrow$. Alle resultaten van die paren van metingen worden verzameld en staan bij de uitkomsten van het experiment, waarbij we voor alle settings 11, 12, etc. evenveel resultaten hebben. Bij zowel A als B worden even vaak $\uparrow$ en $\downarrow$ gemeten. Het blijkt dat de resultaten reduceren tot drie groepen van settings.



Er zijn geen parallele resultaten (0% $\uparrow\uparrow$ of $\downarrow\downarrow$) als de meetrichtingen hetzelfde zijn (en juist 100% antiparallele, 50% $\uparrow\downarrow$ en 50% $\downarrow\uparrow$ score). Als de meetrichtingen 60 graden uit elkaar liggen hebben we parallele spins in 25% van de gevallen en juist in 75% van de gevallen tegengestelde spins. Voor meetrichtingen 120 graden uit elkaar is het juist 75% parallel en 25% antiparallel. In het kader hebben we ons beperkt tot de $\uparrow$ bij A.

Het niet-opzienbare deel van de metingen is dat er bij gelijke standen bij A en B geen parallele spins worden gemeten, in overeenstemming met de spin 0 begintoestand. Dat geldt voor alle gelijke settings (11, 22, en 33). Het opzienbarende komt als we de metingen zoals gedaan bij A en B gaan vergelijken en kijken naar correlaties tussen de andere paren. De vraag is of we de relatieve percentages van paren waar A in stand 1 en B in stand 2 gelijke spins hebben of waar A in stand 1 en B in stand 3 gelijke spins hebben, kunnen begrijpen?

(a) Hoe verklaar je deze uitkomst in de kwantummechanica. Daar is het uitgangspunt

de golffunctie gegeven in de begintoestand, met twee componenten $|\uparrow\downarrow\rangle$ en $|\downarrow\uparrow\rangle$ met coëfficiënten die gekwadeerd $1/2$ opleveren. Ga zelf na wat de waarschijnlijkheden zijn bij de metingen die de ‘experimentele uitkomsten’ opleveren (gebruik hiervoor de kwantumtoestanden in het blokje QUANTUM). De kwantummechanische verklaring heeft als bijzondere het twee-dimensionale karakter van de oplossingsruimte zoals besproken in hoofdstuk 3 (zie figuur 3.4).

(oplossing)

Voor de percentages van de metingen waarbij de meetrichtingen 60° uit elkaar liggen realiseren we dat een $|\uparrow\rangle_{0^\circ}$ meting bij A impliceert dat we bij de gegeven golffunctie dan de toestand $|\uparrow\downarrow\rangle_{0^\circ}$ selecteren. Deze impliceert direct dat we bij B alleen $|\downarrow\rangle_{0^\circ}$ meten voor setting 1 bij B. In de andere gevallen kijken we naar de amplitudo van $\downarrow$ bij B en dat is $\sin(30^\circ)$ met na kwadrateren waarschijnlijkheid $(\sqrt{1/4})^2 = 1/4$ (25%) in stand 2 en $(\sqrt{3/4})^2 = 3/4$ (75%) in stand 3.

- (b) Hoe verklaart een realist op ‘klassieke’ manier deze metingen. In dat geval is het uitgangspunt dat elk van de twee deeltjes de informatie bij zich draagt, dus een ‘briefje’ bij zich heeft met wat te doen bij de stand 1, 2 of 3 van het meetapparaat. De briefjes worden in paren uitgegeven aan de vertrekkende deeltjes en de beginsituatie vereist dat de informatie voor standen 1, 2 en 3 altijd complementair is (zoals in het voorbeeld in het blokje KLASSIEK). Laat nu zien dat bij analyse het aantal paren $N(\uparrow\cdot\cdot;\cdot\cdot\uparrow) \leq N(\uparrow\cdot\cdot;\cdot\uparrow\cdot) + N(\cdot\uparrow\cdot;\cdot\cdot\uparrow)$. Deze ongelijkheid, een voorbeeld van een Bell ongelijkheid, laat zien dat de klassieke verklaring niet werkt want $75\% > 25\% + 25\%$ en niet kleiner of gelijk.

(oplossing)

De oplossing volgt door even de aantallen precies te specificeren, waarbij de meeste vrijheid al vastligt door het complementaire karakter van de twee briefjes,

$$\begin{aligned} N(\uparrow\cdot\cdot;\cdot\cdot\uparrow) &= N(\uparrow\uparrow\downarrow;\downarrow\downarrow\uparrow) + N(\uparrow\downarrow\downarrow;\downarrow\uparrow\uparrow), \\ N(\uparrow\cdot\cdot;\cdot\uparrow\cdot) &= N(\uparrow\downarrow\uparrow;\downarrow\uparrow\downarrow) + N(\uparrow\downarrow\downarrow;\downarrow\uparrow\uparrow), \\ N(\cdot\uparrow\cdot;\cdot\cdot\uparrow) &= N(\uparrow\uparrow\downarrow;\downarrow\downarrow\uparrow) + N(\downarrow\uparrow\downarrow;\uparrow\downarrow\uparrow). \end{aligned}$$

Deze beschrijving volgt de discussie van de EPR paradox in N. David Mermin, *Is the Moon There When Nobody Looks? Reality and the Quantum Theory*, Physics Today 38, 4 (1985) 38.

10.4 Wie het kleine niet eert ...

10.4.1 Pakkingsgraad van enkele kristalroosters

- (a) Bereken de pakingsgraad van de drie roosterstructuren in figuur 4.2.

(oplossing)

Stel de ribbe heeft lengte a . Dan zien we eenvoudig dat voor de roosters:

$$\text{sc: } r_{\text{atom}} = \frac{1}{2} a$$

$$\text{bcc: } r_{\text{atom}} = \frac{1}{4} a\sqrt{3}$$

$$\text{fcc: } r_{\text{atoom}} = \frac{1}{4} a\sqrt{2}$$

Het aantal atomen in de roosters in een kubus is:

$$\text{sc: } n = 8 \times \frac{1}{8} = 1$$

$$\text{bcc: } n = 1 + 8 \times \frac{1}{8} = 2$$

$$\text{fcc: } n = 6 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{8} = 4$$

Dus de pakingsgraad is $p = n \frac{4}{3} \pi r_{\text{atoom}}^3 / a^3$,

$$\text{sc: } p = \frac{1}{6} \pi \approx 0.524$$

$$\text{bcc: } p = \frac{1}{8} \pi \sqrt{3} \approx 0.680$$

$$\text{fcc: } p = \frac{1}{6} \pi \sqrt{2} \approx 0.740$$

- (b) Bereken voor een sc en fcc rooster de maximale straal van een atoom dat nog in het rooster past, d.w.z. bereken de straal van de holtes (uitgedrukt in de ribbe a van de kubus of liever nog in de straal van de atoom r_{atoom} van het originele rooster).

(oplossing)

sc: een inpassend atoom zal uit symmetrieoverwegingen in het midden zitten. Bekijk de rechthoek van 2 schuin tegenover elkaar liggende ribben (zijden dus a en $a\sqrt{2}$). De diagonaal heeft lengte $a\sqrt{3}$. Daarop passen $2r_{\text{atoom}} + 2r_{\text{holte}}$, dus

$$\text{sc: } r_{\text{holte}} = \frac{1}{2} a(\sqrt{3} - 1) = r_{\text{atoom}}(\sqrt{3} - 1) \approx 0.732 r_{\text{atoom}}$$

fcc: Dit rooster is opgebouwd uit gelijkzijdige vierhoeken waarin de afstanden tussen atomen op de hoekpunten $2r_{\text{atoom}} = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$ is. Inpassende atomen liggen dus in het midden (zwaartepunt/hogtepunt) van zo'n gelijkzijdige vierhoeken. Alle zijden hiervan vormen gelijkzijdige driehoeken (met zijden met lengte $2r_{\text{atoom}}$). Hoogtelijnen in deze driehoeken hebben lengte $r_{\text{atoom}}\sqrt{3}$ met hoogtepunt op $2/3$ van hoekpunt, d.w.z. op afstand $\frac{2}{3} r_{\text{atoom}}\sqrt{3}$. De hoogtelijn in de vierhoek loopt van een hoekpunt naar het hoogtepunt in de tegenoverliggende driehoek. De lengte hiervan is $\frac{2}{3} r_{\text{atoom}}\sqrt{6}$ en het hoogtepunt van de vierhoek ligt op $3/4$ van het hoekpunt, d.w.z. op afstand $\frac{1}{2} r_{\text{atoom}}\sqrt{6}$. Deze afstand is ook gelijk aan $r_{\text{holte}} + r_{\text{atoom}}$, dus

$$\text{fcc: } r_{\text{holte}} = r_{\text{atoom}}(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1) \approx 0.225 r_{\text{atoom}}.$$

- (c) Uit het voorgaande blijkt dat voor zwaardere (grotere) atomen die bijvoorbeeld in een sc rooster gerangschikt zijn, er gemakkelijk voldoende ruimte is om een waterstofatoom ($r \approx 0.05$ nm) in de roosterholte op te slaan. Stel je voor dat je het materiaal dan verzadigt met waterstof, wat is dan de dichtheid van waterstof in dat materiaal en vergelijk die met waterstof in de gastoestand.

(oplossing)

Als er ruimte is in een sc rooster zouden er net zo veel H-atomen zijn als zwaardere atomen. Voor een typisch metaal met atoomgewicht van zeg 60 en soortelijk gewicht van 6 kg/l, betekent dit $100 \times N_{\text{av}}$ atomen/l en dus plaats voor evenveel waterstofatomen, corresponderend met 0,1 kg waterstof per liter. Dat is veel meer waterstof

dan in gasvorm. Voor waterstofgas hebben we onder standaard omstandigheden (1 atm, 273 K) N_{av} moleculen per 22,4 liter, dus 2 gram per 22,4 l oftewel een dichtheid van $0,001/22,4 \text{ kg/l} = 8,9 \times 10^{-5} \text{ kg/l}$.

10.4.2 Kwantisatie in het waterstofatoom

In het waterstofatoom wordt de potentiële energie van het elektron in het elektrische veld gegeven door

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

- (a) Laat zien dat de kracht werkend op het elektron gelijk is aan

$$F(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

(oplossing)

De kracht wordt gevonden als $\mathbf{F} = -\nabla U$, in dit geval is alleen de radiële richting belangrijk en hebben we $F(r) = -dU/dr$.

- (b) Wat is de (mks) eenheid van $e^2/4\pi\epsilon_0$ en gebruik die grootte in combinatie met de eenheid voor een massa m en die voor $\hbar$ om een grootte met dimensie van lengte te vinden. De notatie voor ‘eenheid van m is kg’ is ‘ $[m] = \text{kg}$ ’.

(oplossing)

We vinden

$$\left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] = \text{J} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}, \quad \text{dus} \quad \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right] = \text{J m} = \frac{\text{kg m}^3}{\text{s}^2}.$$

Met een beetje puzzelen en met $[m] = \text{kg}$ en $[\hbar] = \text{J s} = \text{kg m}^2/\text{s}$, vinden we

$$\left[\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} \right] = \text{m}.$$

Deze grootte staat bekend als de Bohrstraal en voor een proton is $a_0 \approx 0.05 \text{ nm}$.

- (c) De kracht op het elektron levert de centripetale kracht om het elektron te binden. Combineer dat met $mvr = n\hbar$ om uitdrukkingen te vinden voor straal r_n en energie E_n .

(oplossing)

We combineren

$$\frac{mv^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \Rightarrow mv_n^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

$$mv_n r_n = n\hbar,$$

en vinden

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} = n^2 a_0.$$

De energie van het elektron is

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{1}{n^2} \frac{m e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}.$$

- (d) Wat is de snelheid van het elektron in baan n . Druk deze uit in de lichtsnelheid. Merk op dat we hierbij de dimensieloze grootte $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \approx 1/137$ tegenkomen.

(oplossing)

Uit de kwantisatie voorwaarde vinden we

$$v_n = \frac{n \hbar}{m r_n} = \frac{1}{n} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar}$$

en dus

$$\frac{v_n}{c} = \frac{1}{n} \alpha.$$

De snelheid van het elektron in het atoom is dus niet-relativistisch.

10.4.3 Kwantisatie van de harmonische oscillator

Voor de veelvoorkomende harmonische oscillator wordt de potentiële energie voor een systeem gegeven door

$$U(r) = \frac{1}{2} k r^2$$

(bij een veer is k de veerconstante).

- (a) Laat zien dat de kracht werkend op het systeem gegeven wordt door

$$F(r) = -k r.$$

(oplossing)

De kracht wordt gevonden als $\mathbf{F} = -\nabla U$, in dit geval is alleen de radiële richting belangrijk en hebben we $F(r) = -dU/dr$.

- (b) Construeer grootheden met dimensie van energie en lengte uit de veerconstante k , de massa m en $\hbar$. We merken op dat de grootte $\omega = \sqrt{k/m}$ nuttig kan blijken.

(oplossing)

We vinden

$$[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}. \quad \text{en} \quad [\omega] = \left[\sqrt{\frac{k}{m}} \right] = \text{s}^{-1}.$$

Dat is een (hoek)frequentie. Vermenigvuldigen met $\hbar$ (J s) zien we dat

$$[\hbar\omega] = \text{J} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \quad \text{en} \quad \left[\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right] = \text{m}$$

- (c) De centraal gerichte kracht levert de centripetale kracht om het systeem te binden. Combineer dat met de Bohr conditie $mvr = n\hbar$ om uitdrukkingen te vinden voor straal r_n en energie E_n .

(oplossing)

We combineren

$$\frac{mv^2}{r_n} = k r_n \Rightarrow v_n^2 = \omega^2 r_n^2 \Rightarrow v_n = \omega r_n,$$

$$mv_n r_n = n\hbar,$$

en vinden

$$r_n = \sqrt{n \frac{\hbar}{m\omega}} \quad \text{en} \quad v_n = \sqrt{n \frac{\hbar\omega}{m}}.$$

Daaruit volgt voor de energieniveau's

$$E_n = \frac{1}{2} mv_n^2 + \frac{1}{2} kr_n^2 = n\hbar\omega.$$

We merken op dat de volledige kwantummechanische aanpak uiteindelijk een soortgelijk resultaat oplevert, maar met $n = 2n_r + \ell + \frac{3}{2}$.

- (d) Wat is de snelheid van het systeem in baan n . Vergelijk deze met de lichtsnelheid.

(oplossing)

We vinden

$$\frac{v_n}{c} = \sqrt{n \frac{\hbar\omega}{mc^2}}$$

Dus het ligt aan de verhouding van de karakteristieke energie $\hbar\omega$ en de rust-energie mc^2 wanneer het systeem relativistisch wordt. Wanneer $v_n/c \rightarrow 1$ is bovenstaande afleiding niet meer goed. We moeten dan de 'relativistisch' correcte uitdrukking voor energieën gebruiken.

10.4.4 Kwantisatie van de lineaire potentiaal

Voor een lineaire potentiaal wordt de potentiële energie voor een systeem gegeven door

$$U(r) = T_0 r.$$

De grootheid T_0 (eenheid N) wordt wel de spankracht genoemd.

- (a) Laat zien dat de kracht werkend op het systeem gegeven wordt door

$$F(r) = -T_0$$

(oplossing)

De kracht wordt gevonden als $\mathbf{F} = -\nabla U$, in dit geval is alleen de radiële richting belangrijk en hebben we $F(r) = -dU/dr$.

- (b) Construeer grootheden met dimensie van energie en lengte uit T_0 , m en $\hbar$.

(oplossing)

We vinden

$$[T_0] = \text{N} = \frac{\text{J}}{\text{m}} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}.$$

Een beetje puzzelen geeft

$$\left[\left(\frac{\hbar^2}{m T_0} \right)^{1/3} \right] = \text{m} \quad \text{en} \quad \left[\left(\frac{\hbar^2 T_0^2}{m} \right)^{1/3} \right] = \text{J}$$

- (c) De centraal gerichte kracht levert de centripetale kracht om het systeem te binden. Combineer dat met $mvr = n\hbar$ om uitdrukkingen te vinden voor straal r_n en energie E_n .

(oplossing)

We combineren

$$\frac{mv^2}{r_n} = T_0 \Rightarrow mv_n^2 = T_0 r_n,$$

$$mv_n r_n = n\hbar,$$

en vinden

$$r_n = \left(n^2 \frac{\hbar^2}{m T_0} \right)^{1/3} \quad \text{en} \quad v_n = \left(n \frac{\hbar T_0}{m^2} \right)^{1/3}.$$

Daaruit volgt voor de energieniveau's

$$E_n = \frac{1}{2} mv_n^2 + T_0 r_n = \frac{3}{2} T_0 r_n = \frac{3}{2} \left(n^2 \frac{\hbar^2 T_0^2}{m} \right)^{1/3}.$$

We merken op dat voor de volledige kwantummechanische aanpak geen algebraïsche uitdrukking bestaat, maar een goede benadering is $n = 1.8 n_r + \ell + 1.376$.

- (d) Wat is de snelheid van het systeem in baan n . Vergelijk deze met de lichtsnelheid en bekijk de toepasbaarheid voor quarks met $mc^2 \sim 10$ MeV (up of down quarks) of voor de bottom quark met $mc^2 \sim 5$ GeV voor $T_0 = 1$ GeV/fm.

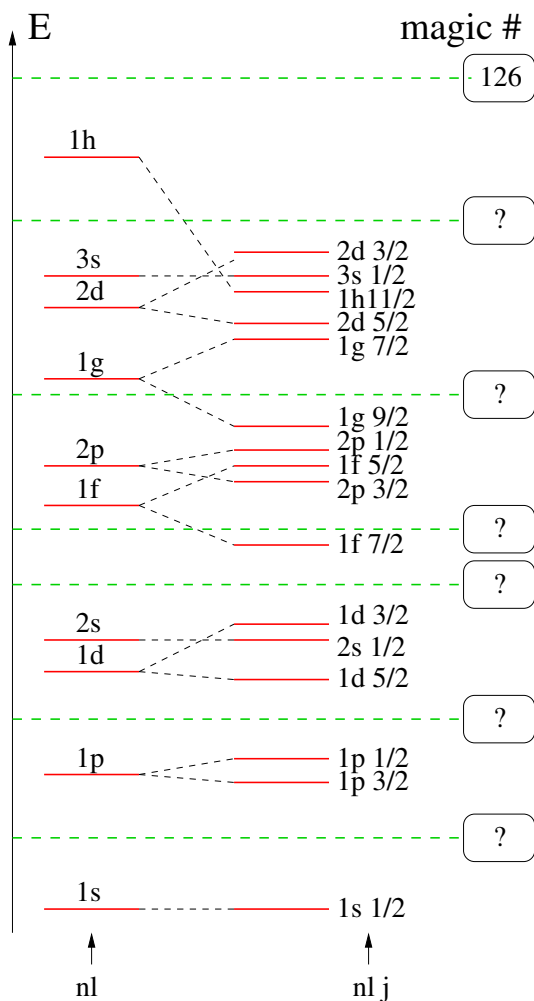
(oplossing)

We vinden

$$\frac{v_n}{c} = \left(n \frac{\hbar c T_0}{m^2 c^4} \right)^{1/3}.$$

De bepalende factor is de vergelijking van $\hbar c T_0$ en $(mc^2)^2$. Voor quarks in een nucleon is de spankracht $T_0 \approx 1$ GeV/fm. Vermenigvuldigd met $\hbar c \approx 0.2$ GeV fm zien we dat $\hbar c T_0 \sim 0.2$ GeV², terwijl voor lichte quarks $mc^2 \sim 10$ MeV en dus $(mc^2)^2 \sim 0.0001$ GeV². We vinden dus dat $\hbar c T_0 / (mc^2)^2 \sim 2000$ en voor $n = 1$ het resultaat $v_1/c \approx 13$, wat aangeeft dat de niet-relativistische uitdrukking niet werkt. De (correcte) relativistische behandeling is in hoofdstuk 4 besproken. Voor een bottom quark met $mc^2 \sim 5$ GeV krijgen we $\hbar c T_0 / (mc^2)^2 \sim 0.008$ en $v_1/c \approx 0.2$ wordt de niet-relativistische benadering al veel beter.

10.4.5 Kwantumtoestanden in atoomkernen



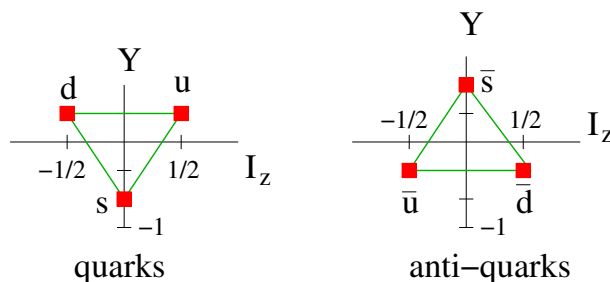
(oplossing)

Het aantal mogelijke toestanden in ieder niveau is $(2j+1)$. De oplossing voor de magische getallen van onder af en gesommeerd zijn de getallen: 2, 8, 20, 28, 50, 82.

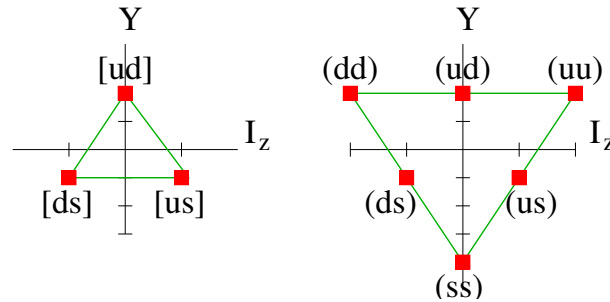
Bij atoomkernen hebben we ook een spectrum van mogelijke energietoestanden, maar hier blijkt het kwantumgetal voor het totale impulsmoment een belangrijke rol te spelen, dus $E = E(n, \ell, j)$. Dit is een gevolg van spin-baan wisselwerkingen. Zowel proton als neutron zijn spin $1/2$ deeltjes. Het spectrum van nlj -toestanden (voor protonen en neutronen) wordt gegeven in nevenstaande figuur, al zijn de niveau's voor protonen en neutronen t.o.v. elkaar ook nog iets verschoven. Startend met nl toestanden, splitst echter voor zowel proton als neutron ieder niveau in 2 niveau's met j -waarden $j = \ell \pm 1/2$. Elk van die nlj niveau's heeft een ontarding vanwege de $2j + 1$ m_j -mogelijkheden. Bepaal uit de ontarding van de verschillende niveau's de magische getallen, die voor zowel de Z - als N -waarden van atoomkernen gelden.

10.4.6 Quark substructuur van baryonen en mesonen

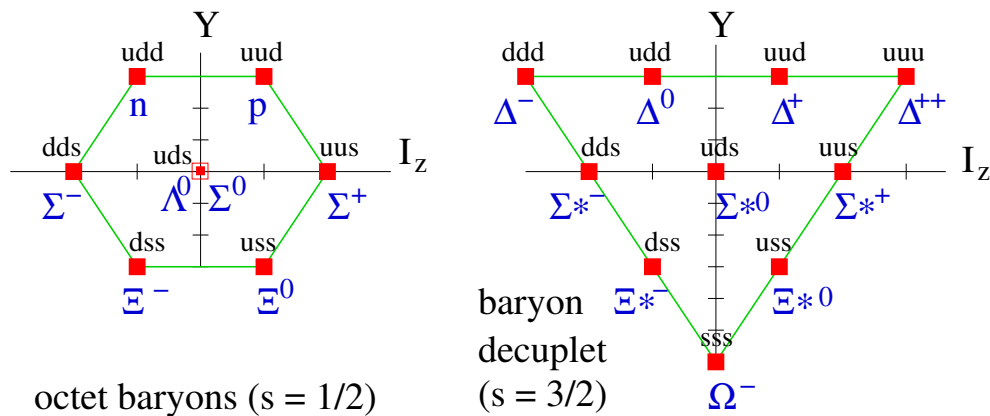
Baryonen zijn opgebouwd uit drie quarks. De multipletten voor de drie lichtste smaken (u, d en s) geïllustreerd in onderstaande figuren. Net zoals we eerder twee spin-toestanden gezien hebben, kunnen we de smaak ook zien als drie specifieke eigenschappen van quarks en antiquarks en daar kwantumgetallen aan toekennen. In dit geval worden daarvoor isospin I_z en hyperlading Y gebruikt, zo gekozen dat ze voor het gemiddelde van de multipletten (die aangegeven worden als $\underline{3}$ en $\underline{\bar{3}}^*$) op nul uitkomen.



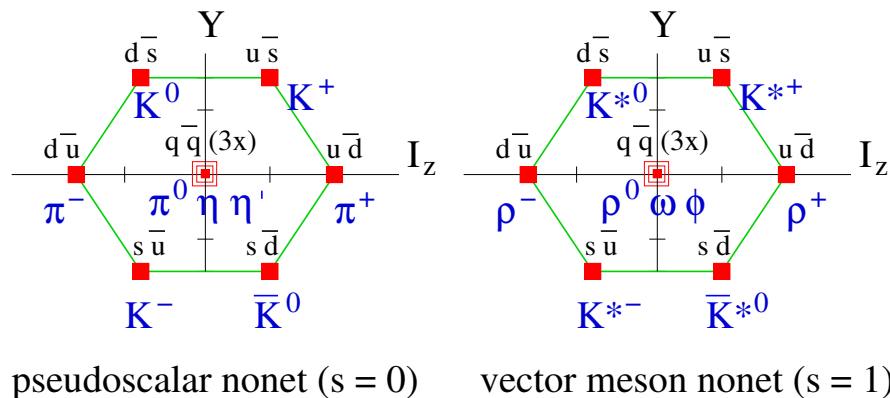
Voor twee-quark toestanden (qq) kunnen de negen (drie maal drie) toestanden opgesplitst worden in twee multipletten (een $\underline{3}^*$ triplet van antisymmetrische toestanden) en een $\underline{6}$ sextet van symmetrische toestanden. Wat spin betreft kunnen de toestanden in het triplet alleen spin $s = 0$ hebben en de toestanden in het sextet alleen spin $s = 1$.



Gecombineerd met een derde quark krijgen we 27 toestanden, waarvan er 10 volledig symmetrisch zijn. Dat blijken ook symmetrische spin toestanden te zijn (spin $3/2$). Het Pauli principe laat naast de tien toestanden met spin $3/2$, slechts 8 toestanden (octet $\underline{8}$) met spin $1/2$ toe.



Mesonen bestaan uit quark en antiquark combinaties. Er zijn geen beperkingen omdat het geen identieke deeltjes zijn. We krijgen twee nonetten, een met spin 0 en een met spin 1.



Deeltjes en hun eigenschappen, zoals massa en spin kunnen gevonden worden op de website van de 'particle data group', <http://pdg.lbl.gov>.

- (a) Aan de quarks en antiquarks kunnen we baryongetal $B = +1/3$ en $B = -1/3$ toekennen, met als logische consequentie $B = 1$ voor baryonen en $B = 0$ voor

mesonen. Ga in het triplet na dat het aantal vreemde quarks minus anti-quarks gegeven wordt door

$$\begin{aligned}N_s &= B - Y \\ N_{\bar{s}} &= -B + Y\end{aligned}$$

Voor de ‘vreemdheid’ $S \equiv N_{\bar{s}} - N_s$ krijgen we de relatie

$$S = Y - B,$$

een relatie die niet alleen voor quarks, maar ook voor de mesonen en baryonen geldt. Overtuig jezelf er van dat dit niet alleen werkt voor de basistripletten, maar ook voor de hieruit opgebouwde baryonen en mesonen. We merken op dat positief/negatief voor ‘vreemdheid’ puur een kwestie van afspraak is. Geef ook een uitdrukking voor de lading Q .

(oplossing)

Voor de lading (in veelvoud van e) vinden we $Q = \frac{1}{2}Y + I_z$.

- (b) Zoek de massa’s van de decuplet baryonen met spin $J = 3/2$ op? (op de pdg-webpagina’s wordt de spin van een deeltje met J aangegeven omdat voor een uit quarks samengesteld deeltje de spin van het deeltje in het algemeen het resultaat van quark spins en baanimpulsmoment is). Wat valt je op. Kun je de massaverschillen kwalitatief verklaren?

(oplossing)

Voor de verschillende baryonen, door de ‘particle data group’ gerangschikt naar hun ‘vreemdheid’ of ‘hyperlading’ vinden we als laagste spin $J = 3/2$ toestanden de deeltjes $\Delta(1232)$, $\Sigma(1385)$, $\Xi(1530)$ en $\Omega(1672)$. Tussen haakjes staat de massa in MeV/c². De stappen zijn respectievelijk 153, 145 en 142 MeV, terwijl de baryonen iedere keer een vreemde quark meer hebben. Blijkbaar is in een baryon de energiebijdrage van een vreemde quark zo’n 150 MeV meer dan de energiebijdrage van een niet-vreemde (u of d) quark. Dit wordt toegeschreven aan het feit dat vreemde quarks een grotere massa hebben dan lichte quarks. Meer gedetailleerde analyses wijzen op massa’s van zo’n 10 MeV voor up en down quarks en zo’n 180 MeV voor vreemde quarks.

- (c) Doordat quarks en antiquarks in mesonen behalve spin ook nog eens een baanimpulsmoment kunnen hebben zien we ρ -deeltjes met hogere spins. Afhankelijk van het feit of het baanimpulsmoment even of oneven is worden deze deeltjes a - of ρ -mesonen genoemd. We hebben bijvoorbeeld

$J = 1$	$J = 2$	$J = 3$	$J = 4$
$\rho(770)$	$a_2(1320)$	$\rho_3(1690)$	$a_4(2000)$

Bestudeer het verband tussen massa en spin. Vergelijk dit met de theoretische beschouwing in hoofdstuk 4 (kader p. 62).

(oplossing)

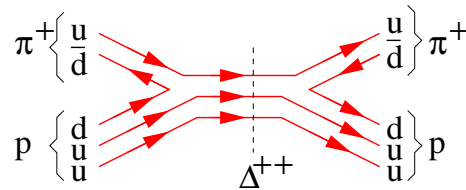
We krijgen voor de gekwadrateerde massa’s:

$J = 1$	$J = 2$	$J = 3$	$J = 4$
0.59	1.74	2.85	4.0

waaruit voor deze mesonen een helling volgt van $1/\alpha' \approx 1,15 \text{ GeV}^2$.

10.4.7 Paar creatie en annihilatie in deeltjesbotsingen

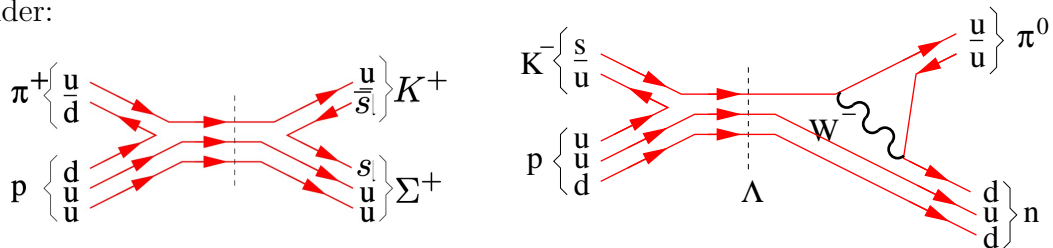
Bij botsingen tussen deeltjes kunnen quarks en antiquarks elkaar annihilieren of ze kunnen in paren gecreëerd worden. Het onderstaande quarklijn-diagram laat schematisch zien wat er gebeurt zoals hieronder in π^+p verstrooiing.



Kijk op deze manier met gebruik van quarklijnen-diagrammen ook eens naar het creëren van paren van quarks die niet in botsende deeltjes voorkomen, aangenomen dat er voldoende energie is om ook ‘vreemde’ deeltjes (met een of zelfs meer s -quarks erin) te produceren. Ook interessant is K^-p -verstrooiing inclusief verval via uitwisseling van zwakke krachtdeeltjes.

(oplossing)

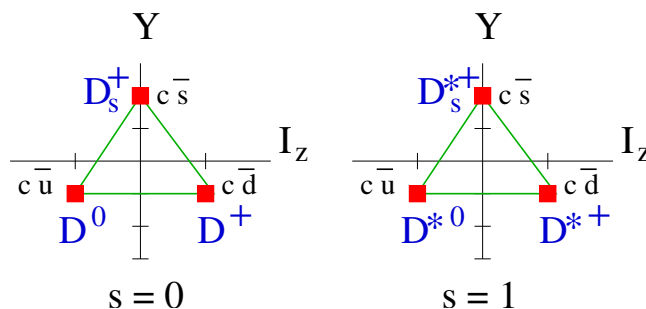
Voorbeelden voor $s\bar{s}$ productie of voor verval van een s -quark via W -uitwisseling staan hieronder:



10.4.8 Hadronen met charm quarks

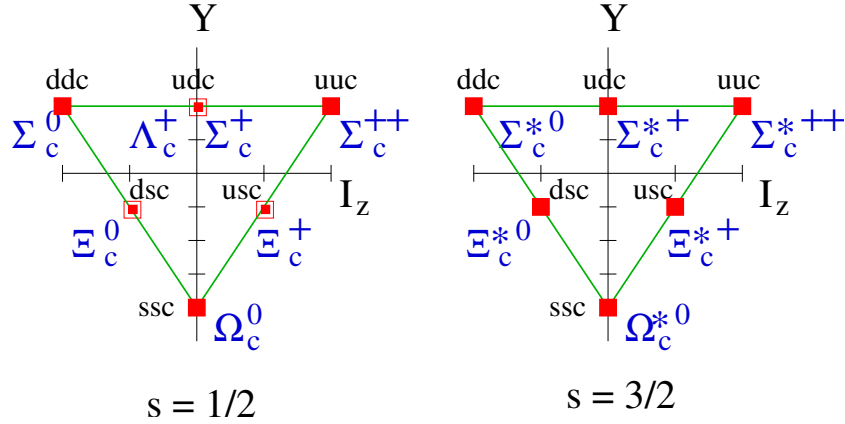
- (a) Teken voor D -mesonen (quark-inhoud $c\bar{q}$) $Y - I_z$ diagrammen. Wat zijn de ‘spins’ van de mesonen waarin het baanimpulsmoment nul is.

(oplossing)



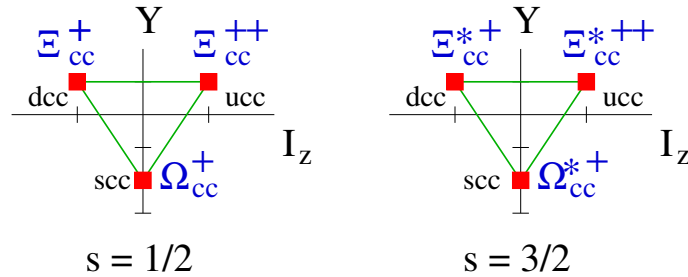
- (b) Teken voor baryonen met een c-quark de $Y-I_z$ diagrammen. Kun je de bijbehorende baryonen vinden op de pdg-webpagina's. Kijk eens naar de mogelijke spins en probeer die te begrijpen.

(oplossing)



- (c) Teken voor baryonen met twee c-quarks de $Y-I_z$ diagrammen. Kun je de bijbehorende baryonen vinden op de pdg-webpagina's. Kijk eens naar de mogelijke spins en probeer die te begrijpen.

(oplossing)



10.4.9 Het magnetisch moment van nucleonen

Een ‘elementair deeltje’ zoals een elektron gedraagt zich als een magneetje waarvan het magnetisch moment wordt gegeven door

$$\boldsymbol{\mu}_e = -g_e \frac{e}{m_e} \mathbf{S},$$

waar $\mathbf{S}$ de spin van het elektron is ($\pm \frac{1}{2}\hbar$). Het minteken komt van de lading van het elektron ($Q_e = -e$), terwijl de g-factor het verschil aangeeft met het ‘klassieke’ resultaat. Op hogere order correcties die later nog besproken worden is $g_e = 2$, de waarde voor een ‘elementair’ fermion.

Voor een proton en neutron werd al in de jaren na 1930 gevonden dat de waarden voor heel anders waren,

$$\boldsymbol{\mu}_N = g_N \frac{e}{M_N} \mathbf{S}_N \quad \text{met } g_p \approx 5.6 \text{ en } g_n = -3.8.$$

Met name het resultaat voor het neutron, een deeltje zonder lading, is vreemd. De oplossing kwam uit het feit dat proton en neutron samengestelde deeltjes zijn opgebouwd uit up en down quarks met ladingen $Q_u = \frac{2}{3}e$ en $Q_d = -\frac{1}{3}e$.

(a) Gebruik de golffuncties inclusief spin voor proton en neutron,

$$\begin{aligned} |p, \uparrow\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} |u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} |u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle, \\ |n, \uparrow\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |d_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} |d_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} |d_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle, \end{aligned}$$

om te laten zien dat de aantallen quarks met spins $\pm\frac{1}{2}\hbar$ gewogen met de waarschijnlijkheden zoals die uit de golffuncties volgen in een proton of neutron met spin $+\frac{1}{2}\hbar$ worden gegeven door

aantal	$u_\uparrow$	$u_\downarrow$	$d_\uparrow$	$d_\downarrow$
proton $\uparrow$	5/3	1/3	1/3	2/3
neutron $\uparrow$	1/3	2/3	5/3	1/3

(oplossing)

Dit volgt door de gekwadrateerde amplitudo's voor de quarks met de juiste smaak en spin op te tellen.

(b) Laat zien dat aangenomen dat voor quarks de g-factors $g_u = g_d = 2$ zijn en onder de aanname van gelijke massa's voor $m_q = m_u = m_d$ volgt dat

$$g_p = 2 \frac{M_N}{m_q} \text{ en } g_n = -\frac{4}{3} \frac{M_N}{m_q}.$$

met een verhouding $g_n/g_p = -2/3$.

(oplossing)

Dit volgt door de gekwadrateerde amplitudo's voor de quarks met de juiste smaak en spin op te tellen, maar nu nog vermenigvuldigd met g-factoren, lading en teken van de spin, dus met $\pm 4/3$ voor up quarks met spin up/down en met $\mp 2/3$ voor down quarks met spin up/down.

(c) De gemeten verhouding (zie hierboven) is inderdaad ongeveer $-2/3$ en dus consistent met deze berekening waarbij uitgegaan is van gelijke massa's en waaruit een waarde voor deze massa van de up en down quarks gevonden kan worden. Je kunt proberen of verschillende massa's uit deze waarden te halen zijn, maar de verschillen blijven klein. Ook uit andere gegevens, zoals het verschil tussen proton en neutron massa's, weten we dat de effectieve up en down quark massa's ongeveer gelijk zijn.

- (d) Zelfs als de massa's van up en down quarks veel kleiner zijn en daar zijn veel aanwijzingen voor, dan nog kunnen effectieve massa's ongeveer hetzelfde zijn. Zulke effectieve massa's zijn in feite niets anders dan de energieën in een cavity. Laat bijvoorbeeld zien dat als $m_u c^2 = 2,2 \text{ MeV}$ en $m_d c^2 = 4,7 \text{ MeV}$ (dit worden de 'current' massa's genoemd) en de impuls in een nucleon met afmetingen $R_N \approx 0.7 \text{ fm}$ wordt gegeven door $pc = \hbar/R \approx 300 \text{ MeV}$, de energieën praktisch gelijk zijn, $E_u \approx E_d$.

(oplossing)

Hiervoor gebruiken we $E_q = \sqrt{p^2 c^2 + m_q^2 c^4}$.

10.5 De magie van drie

10.5.1 Spiegelen van magneten

Beredeneer wat er gebeurt met noord- en zuidpool voor het spiegelbeeld van een magneet?

(oplossing)

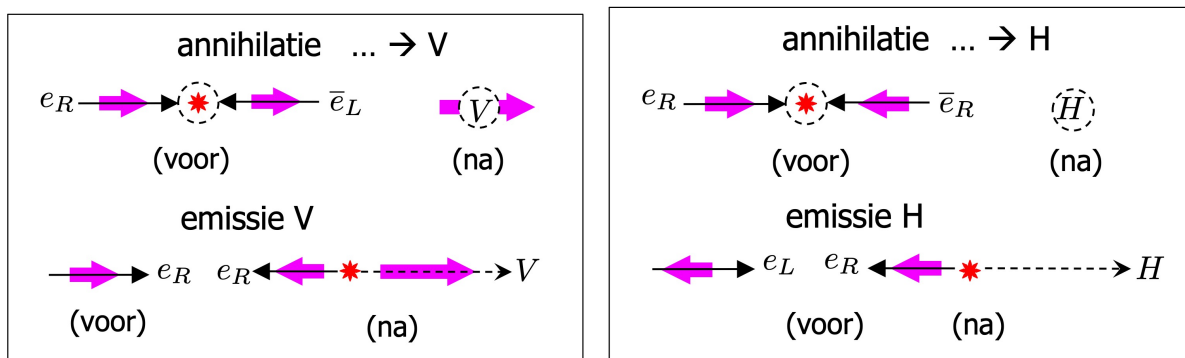
De richting van het magneetveld draait om, dus noord- en zuidpool verwisselen van rol. Dit is het eenvoudigste te zien aan het magnetisch veld van een spoel waar een stroom doorheen loopt.

10.5.2 Annihilatie en emissie bij krachtdeeltjes

In hoofdstuk 5.4 is besproken hoe krachtdeeltjes V en Higgs deeltjes H optreden bij creatie van fermion-antifermion toestanden en hoe absorptie van deze deeltjes mogelijk is rekening houdend met de spin (spin 1 voor V en spin 0 voor H). Geef in analogie met de figuren in 5.6 de figuren voor annihilatie van een fermion-antifermion paar en de emissie van de deeltjes.

(oplossing)

Gebruikmakend van discrete symmetrieën C , P en/of T vinden we



10.5.3 Vervalsmogelijkheden van vreemde quarks

Vanwege het feit dat het zwakke doublet niet (d, u) maar (d', u) is waar d' een lineaire combinatie is van d , s en b quarks bestaat de overgang van $s \rightarrow u$ met emissie van een W -deeltje. Ga na welke eindtoestand mogelijk zijn als het zwakke verval van Λ via emissie van een W -deeltje, $s \rightarrow u + W^-$ verloopt en we weten dat W^- o.a. kan vervallen naar $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}$, $W^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}$, $W^- \rightarrow d + \bar{u}$.

(oplossing)

We krijgen dan

$$\begin{array}{ll}
 uds \rightarrow udu + W^- & \rightarrow udu + e^- + \bar{\nu} & \Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \\
 & \rightarrow udu + \mu^- + \bar{\nu} & \Lambda \rightarrow p + \mu^- + \bar{\nu} \\
 & \rightarrow udu + d + \bar{u} \rightarrow uudd\bar{u} & \Lambda \rightarrow p + \pi^- \\
 & & \Lambda \rightarrow n + \pi^0
 \end{array}$$

Het is belangrijk om na te gaan dat vervalsprocessen energetisch mogelijk zijn.

10.5.4 Metingen aan verstrengelde toestanden

- (a) Laat zien dat na een meting in de eerste van de bipartite ruimte $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ de Bell-toestand

$$|\text{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\text{RL}\rangle + |\text{LR}\rangle).$$

volledig word vastgelegd.

(oplossing)

Bijvoorbeeld meting van eerste toestand als R , geeft

$$|\text{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\text{RL}\rangle + |\text{LR}\rangle) \xrightarrow{\text{meting}} \text{ketRL},$$

een separabele (product) toestand.

- (b) Onderzoek op dezelfde manier de tripartite verstrengelde toestanden en laat zien dat de Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) klasse fragiel is en alles vastlegt na één lokale interactie of meting, terwijl de W -klasse (en ook de $\bar{W}$ -klasse) robuust is en verstrengeld blijft na één interactie.

(oplossing)

Meting van eerste toestand als R geeft

$$\begin{aligned}
 |\text{GHZ}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\text{RRR}\rangle + |\text{LLL}\rangle) \xrightarrow{\text{meting}} |\text{RRR}\rangle \\
 |\text{W}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\text{RRL}\rangle + |\text{RLR}\rangle + |\text{LRR}\rangle) \xrightarrow{\text{meting}} \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{R}\rangle \otimes (|\text{RL}\rangle + |\text{LR}\rangle).
 \end{aligned}$$

10.6 Met vereende krachten

10.6.1 Bewegen in gekromde ruimte

- (a) Bereken de omwentelingstijd voor een satelliet dicht bij het aardoppervlak. Druk het resultaat uit in de versnelling van de zwaartekracht ($g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$).

(oplossing)

We kunnen het resultaat in de vergelijking volgend op vgl. 2.5 gebruiken gecombineerd met $g = GM_{\text{aarde}}/R^2$, dus

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_{\text{aarde}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Met $R = 6000 \text{ km}$, vinden we ongeveer 84 minuten.

- (b) Bereken de tijd nodig om ‘door de aarde te vallen’ zoals beschreven in 3.1 gebruikmakend van de eigenschap dat de kracht op afstand r van het aardmiddelpunt wordt bepaald door de massa binnen een bolschil met straal r .

(oplossing)

De kracht binnen de Aarde wordt gegeven door

$$F(r) = -\frac{GM_{\text{aarde}}m}{r^2} \frac{r^3}{R^3} = \frac{GM_{\text{aarde}}m}{R^3} r = \frac{mg}{R} r$$

en is naar het middelpunt gericht. De beweging is dus net als die van een veer met de kracht evenredig met de afstand tot het middelpunt. De bewegingsvergelijking wordt

$$\ddot{r} = -\frac{g}{R} r,$$

wat aanleiding geeft tot oscillaties met hoekfrequentie $\omega = \sqrt{g/R}$. De trillingstijd hiervoor is

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}},$$

identiek aan de omlooptijd van een satelliet dicht bij aardoppervlak. De tijd van de ene naar de andere kant van de aarde is de helft, 42 minuten.

10.6.2 Elementaire analyse van grootheden met G

Construeer uit de grootheden $\hbar$ (de gereduceerde Planck constante), c (de lichtsnelheid) en G (de gravitatieconstante van Newton) een grootheid met dimensie van energie en een grootheid met dimensie van lengte.

(oplossing)

De grootheden genoemd aan het einde van paragraaf 6.1 zijn het resultaat. Deze zijn met de gegeven grootheden als startpunt uniek (op constanten na).

10.7 Het ongrijpbare neutrino

10.8 De geschiedenis van het heelal

10.8.1 Lichtemissie van ‘zwarte stralers’ met temperatuur T

- (a) Leidt de uitdrukking voor $\mathcal{E}(\lambda, T)$ af uit die voor $\mathcal{E}(f, T)$ gebruikmakend van

$$\mathcal{E}(\lambda, T) d\lambda = \mathcal{E}(f, T) df.$$

(oplossing)

Gebruik $df = d(c/\lambda) = (c\lambda^2) d\lambda$.

- (b) Gebruik bijvoorbeeld Mathematica om de Planck curve als functie van $y = \lambda kT/hc$ te plotten.

(oplossing)

Als functie van deze variable krijgen we $\mathcal{E}(y, T) dy = \mathcal{E}(\lambda, T) d\lambda$ met

$$\mathcal{E}(y, T) = \frac{8\pi (kT)^4}{(hc)^3} \frac{1}{y^5} \frac{1}{(e^{1/y} - 1)},$$

- (c) Bepaal de waarde $y_{\max}$ van het maximum en leidt de uitdrukking voor de $\lambda_{\max} T$ af. Check de numerieke waarde in mks eenheden.

(oplossing)

Het maximum ligt bij $d\mathcal{E}/dy = 0$,

$$\left(-\frac{5}{y^6}\right) (e^{1/y} - 1) - \left(\frac{1}{y^5}\right) e^{1/y} \left(-\frac{1}{y^2}\right) = 0,$$

$$y = \frac{e^{1/y}}{5(e^{1/y} - 1)} = \frac{1}{5(1 - e^{-1/y})}.$$

Dit ligt niet zo ver van $y = 0,2$. Door nu 0,2 in de rechteruitdrukking te substitueren krijgen we een betere schatting van y ,

$$y = \frac{0,2}{(1 - e^{-5})} = 0,2014,$$

Desgewenst kan het nog een keer geïtereerd worden, maar dat levert bij bovenstaande nauwkeurigheid (4 decimalen) niets nieuws meer op. De Convergentie gaat heel snel, omdat e^{-5} al een erg klein getal is. We vinden dus

$$\lambda_{\max} T = 0,2014 \frac{hc}{k} = 2,9 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

10.8.2 Het aantal fotonen per cm^3 in de kosmos

(a) Gebruik

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

om te laten zien dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

en leidt hiermee de gemiddelde energie voor fotonen met een bepaalde frequentie af.

(oplossing)

Differentieer de beginuitdrukking en vermenigvuldig met x . Zie verder kader in tekst.

(b) Beredeneer dat het uitgezonden vermogen per m^2 van een zwarte straler gelijk is aan $c\mathcal{E}$.

(c) Gebruik

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

om te laten zien dat de Stefan-Boltzmann constante gelijk is aan

$$\sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}.$$

(oplossing)

Dit betekent niets anders dan overal f vervangen door $x = hf/kT$, d.w.z. $f = xkT/h$. Als check is eenvoudig na te gaan dat inderdaad $[\sigma] = \text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$.

(d) Gebruik

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{e^x - 1} = 2\zeta(3) \approx 2,404$$

om een uitdrukking voor de dichtheid van fotonen in een zwarte straler af te leiden.

(oplossing)

De dichtheid van fotonen per frequentie-interval en per volume is gelijk aan $\mathcal{N}(f, T) = \mathcal{E}(f, T)/hf$, dus

$$\mathcal{N}(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}.$$

Hieruit vinden we na integratie over frequentie de dichtheid

$$\mathcal{N}(T) = \gamma T^3 \quad \text{met} \quad \gamma = 16\pi \zeta(3) \left(\frac{k}{hc}\right)^3 \approx 60,4 \times \left(\frac{k}{hc}\right)^3.$$

Het numerieke resultaat is $\gamma \approx 2,03 \times 10^7 \text{ m}^{-3}$. Voor het heelal met een temperatuur van 2,725 K vinden we ongeveer 410 fotonen/ cm^3 .

10.8.3 Het menselijk lichaam als ‘zwarte straler’

- (a) Beschouw een mens als een volume met constante temperatuur. Bereken de uitgezonden energie per seconde en per oppervlakte van een mens bij lichaamstemperatuur.

(oplossing)

Het vermogen per oppervlakte is bij $T = 309$ K (36 graden Celsius)

$$I = \sigma T^4 \approx 520 \text{ W/m}^2.$$

- (b) Als de lichaamstemperatuur gelijk zou zijn aan de omgevingstemperatuur, dan zou er geen energietransport zijn. Gebruik dit om de opgenomen energie uit de omgeving te schatten bij 20 graden Celsius.

(oplossing)

De opgenomen energie per seconde per oppervlakte is bij $T = 293$ K gelijk aan $I \approx 420 \text{ W/m}^2$.

- (c) Bereken uit het verschil het vermogen van een mens. Klopt dit een beetje?

(oplossing)

Beschouwen we de mens als een tonnetje met volume 75 liter, dan is dus $V = \pi r^2 h = 75 \text{ dm}^3$. Nemen we een straal van $r = 0,12$ m, dan krijgen we $h = 1,66$ m. Het oppervlak is dan $O = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 1,3 \text{ m}^2$. Het verschil tussen (a) en (b) is ca. 100 W/m^2 . Dus het vermogen is zo’n 130 W, exact de goede orde van grootte. De ruststofwisseling is ca. 75 W, een vermogen van 130 W correspondeert met lichte arbeid. Boven 200 W betekent grote inspanning, waarbij warmteafvoer inderdaad een belangrijk punt is.

10.8.4 Dichtheid van donkere materie uit rotatiecurves

Schat de (constante) dichtheid van materie (in kg/m^3 en in aantal protonen per cm^3) zoals die uit de rotatiekromme van M33 volgt.

(oplossing)

We kunnen bijvoorbeeld de massa binnen een straal van $R = 10 \text{ kpc} \approx 3 \times 10^{20} \text{ m}$ berekenen. Die is gelijk aan $M = v^2(R) R/G$ (met $G \approx 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$). Voor de lichtgevendende massa vinden we uit $v(R) \approx 45 \times 10^3 \text{ m/s}$ als resultaat $M_{\text{lichtgevend}} \approx 1 \times 10^{40} \text{ kg}$ en voor het totaal met $v(R) \approx 120 \times 10^3 \text{ m/s}$ vinden we $M_{\text{totaal}} \approx 7 \times 10^{40} \text{ kg}$. Dus voor de donkere materie vinden we $M_{\text{DM}} \approx 6 \times 10^{40} \text{ kg}$. Delen door het volume, $(4\pi/3)R^3 \approx 1,1 \times 10^{62} \text{ m}^3$ geeft een dichtheid

$$\rho_{\text{DM}} \approx 5 \times 10^{-22} \text{ kg/m}^3$$

of met $m_p \approx 1,6 \times 10^{-27} \text{ kg}$, een dichtheid $\rho_{\text{DM}} \approx 0,3 \text{ protonen/cm}^3$. Merk overigens op dat de donkere materie zeker niet uit protonen bestaat, maar op deze manier is het een

beetje te vergelijken met de dichtheid van de interstellaire materie, die bijvoorbeeld in de schijf van het melkwegstelsel van de orde van 5 protonen/cm³ is.

10.9 Samen meer: complexiteit



Piet Mulders is emeritus hoogleraar theoretische natuurkunde. Hij werkte bij de Vrije Universiteit (VU) en het Nationaal Instituut voor Subatomair Fysica (Nikhef) in Amsterdam. Hij was actief in het bestuur van de Nederlandse Natuurkundige Vereniging (NNV) en de redactie van het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde (NTvN). Eerder studeerde hij natuurkunde in Nijmegen en werkte na zijn promotie in 1980 in de Verenigde Staten bij Los Alamos National Laboratory en het Massachusetts Institute of Technology. In 2012 verwierf hij een prestigieuze Advanced Grant van de European Research Council.

