

Mededelingen

Plan van aanpak

1. Overleg onderwijsdirectie (FEW, N&S)
2. Extra begeleider: Max Baak, + ?
 1. Engels een bezwaar?
 2. Groep splitsen
3. Hoofdstukken 21 - 24
 1. Stof wordt gedurende 2 weken nog eens besproken; zowel in hoor- als werkcollege
 2. Tentamen 21 maart 2005 t.t.v. hoorcollege
 3. Tentamen is verplicht, bepaalt 40% van eindcijfer
4. Daarna hoofdstukken 25 - 30.
 1. 1 hoofdstuk per week
 2. Hoor- en werkcollege volgen elkaar direct.

Inhoud

Elektrostatica

1. Wet van Coulomb: vergelijking voor elektrische kracht
2. Wet van Gauss: vergelijking voor elektrisch veld
3. Elektrische potentiaal
- 4. Elektrostatische energie, capaciteit, diëlektricum

PFSAE:

- Gradiënt: §23.3
- Potentiaal V: §23.2 en §23.4
- Energie & Arbeid: §24

Hoofdstuk 23: 22, 27, 34, 43, 54, 57, 73, 77, 87

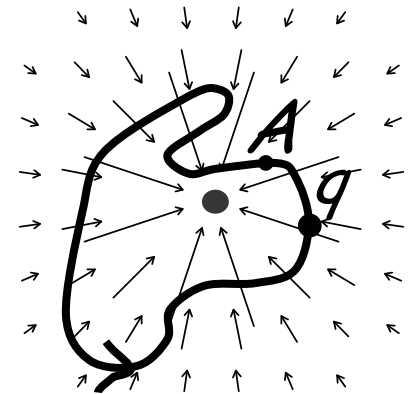
Hoofdstuk 24: Energie

Het verslepen van lading: arbeid

De energie van een collectie
puntladingen

Lading verslepen $\rightarrow$ arbeid

Voor veld puntlading geldt: $\oint_{\text{kring: } A \rightarrow A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_A = 0$

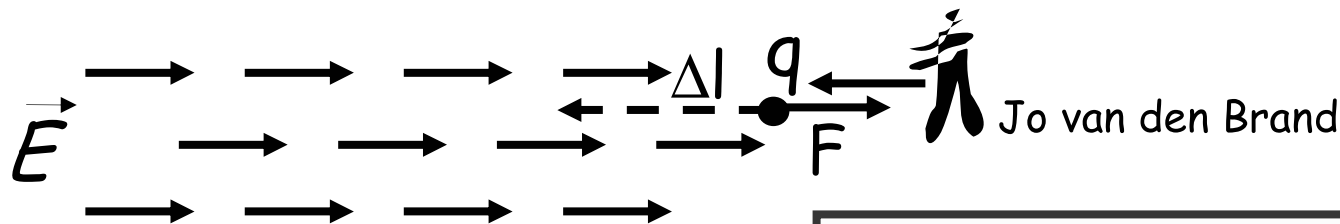


Superpositie principe leert dat elk $\vec{E}$ -veld gelijk is vectorsom $\vec{E}$ -velden puntladingen!

$\Rightarrow$

$$\oint_{\text{kring}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Voor de kracht $\vec{F}$ op lading q in veld $\vec{E}$ geldt: $\vec{F} = q\vec{E}$



Arbeid bij verplaatsing $\Delta\vec{l}$

• E-veld: $\Delta W = +q\vec{E} \cdot \Delta\vec{l}$

• JvdB: $\Delta W = -q\vec{E} \cdot \Delta\vec{l}$

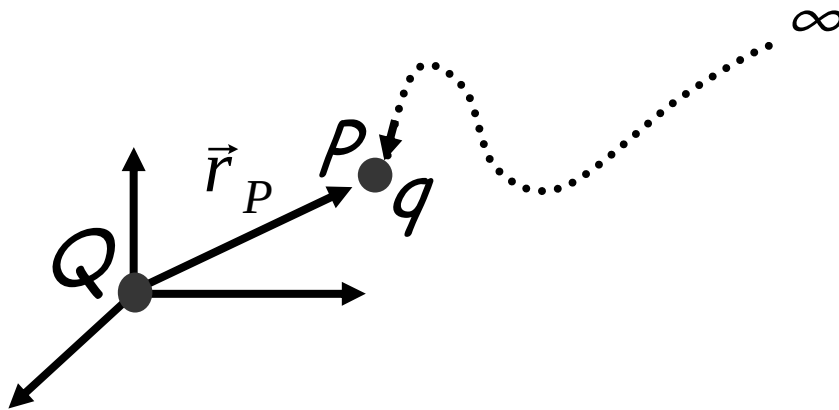
Tenzij anders wordt vermeld:
arbeid verricht door E-veld!

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{l}: \quad W \equiv \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l} \\ A \rightarrow B: \quad W \equiv \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q(V_A - V_B) \\ A \rightarrow A: \quad W \equiv \oint_{\text{kring: } A \rightarrow A} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{kring: } A \rightarrow A} q\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{array} \right.$$

Energie van een ladingsverdeling

Energie in ladingsconfiguratie?

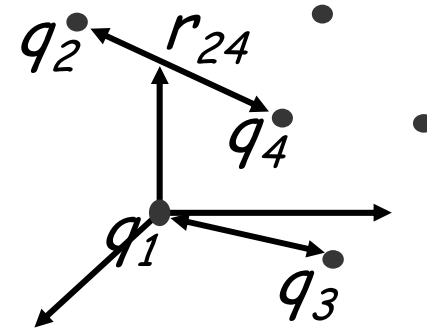
Voor N ladingen $q_1, q_2, \dots$



Integreer kracht op q van $\infty \rightarrow P$

$$W = \int_{\infty}^P \vec{F}_q \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^P q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= - \int_{\infty}^P q \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l} = -q V_P = \frac{-Qq}{4\pi\epsilon_0 r_P}$$



$$W_{12} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

$$W_{123} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} - q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$$

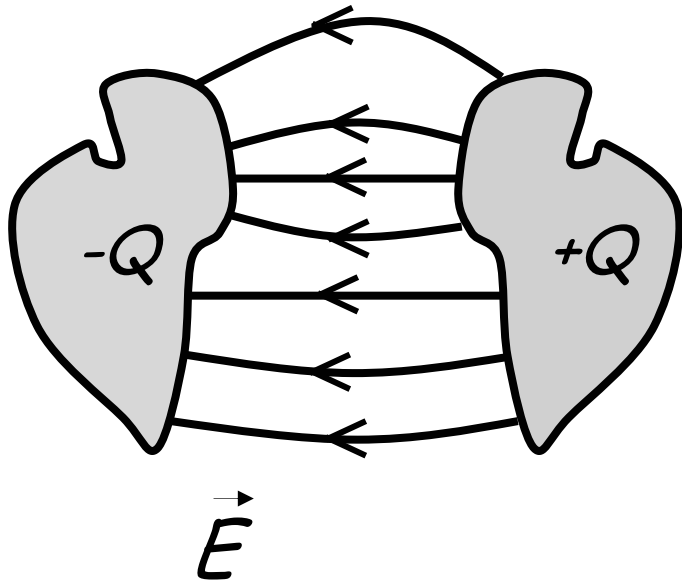
$$= -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} - \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} - \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \equiv -\frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i)$$

Voor energie U :
 $(\Delta U_{\text{veld}} = -W_{\text{veld}})$

$$U \equiv -W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\text{volume}} \rho V(\vec{r}) dv$$

Condensator



$$V \equiv V_{+Q} - V_{-Q} = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{l} \propto Q$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{V} = \text{constant} \equiv C$$

C heet: "capaciteit"

Eenheid:

$[C] = [Q]/[V] = \text{Coulomb/Volt} \equiv \text{Farad}$

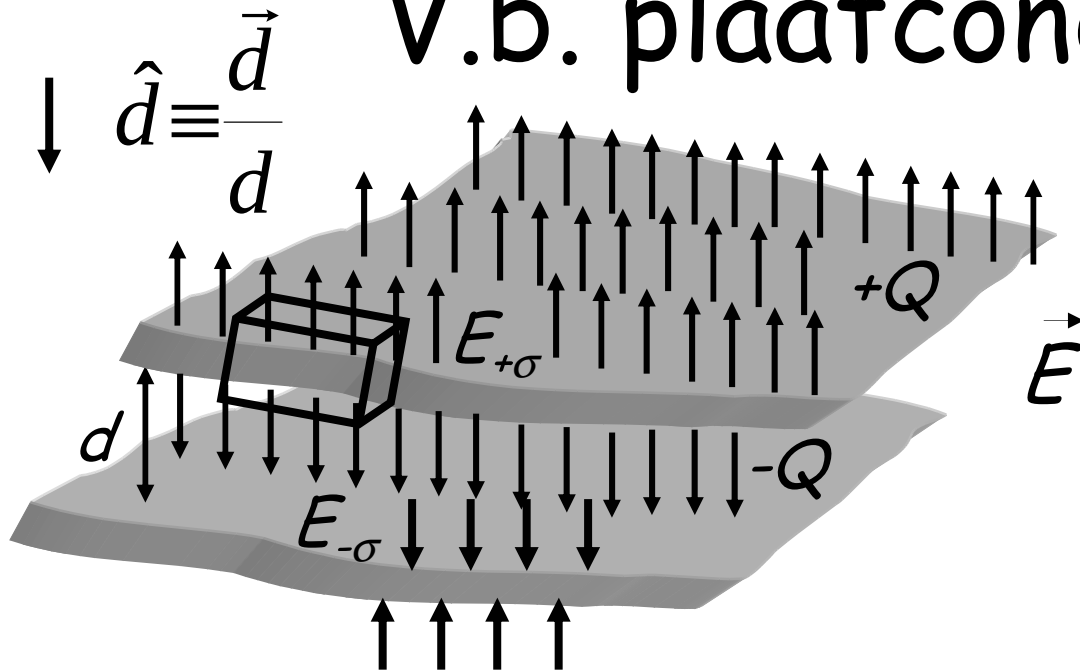
Praktijk: μF d.w.z. 10^{-6} F

Energie van condensator :

$$\left. \begin{array}{l} q \rightarrow q + \Delta q \\ U \rightarrow U + \Delta U \end{array} \right\} \Delta U = V(q) \Delta q = \frac{q \Delta q}{C}$$

$$\Rightarrow U \equiv \sum \Delta U \rightarrow \int dU = \int_0^Q \frac{q dq}{C} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \Big|_0^Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2$$

V.b. plaatcondensator



Plaatcondensator:

- lading Q
- separatie d
- oppervlak A

Gauss doosje enkele plaat: $2 E_{\sigma} (\delta A) = \frac{\sigma (\delta A)}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{\sigma} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$

$\Rightarrow \vec{E}$ - veld tussen platen: $E = E_{+\sigma} + E_{-\sigma} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} + \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

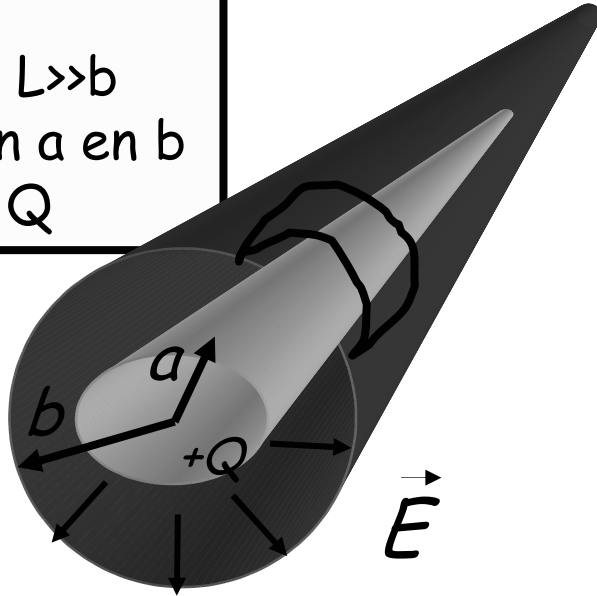
$\Rightarrow$ potentiaal: $V \equiv \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$

$\Rightarrow$ capaciteit: $C \equiv \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A \epsilon_0}{\sigma d} = \frac{A \epsilon_0}{d}$

V.b. Cilinder- en bolcondensator

Cilinder

- lengte $L \gg b$
- stralen a en b
- lading Q



Gauss cylindertje : $E_r 2\pi r l = \frac{\sigma 2\pi a l}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{\sigma a}{r \epsilon_0}$

$\Rightarrow \vec{E}$ -veld: $\vec{E} = \vec{E}_r = \frac{\sigma a}{r \epsilon_0} \hat{r}$

$\Rightarrow$ potentiaal: $V \equiv \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow \int_a^b \frac{\sigma a}{r \epsilon_0} dr = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \ln(b/a)$

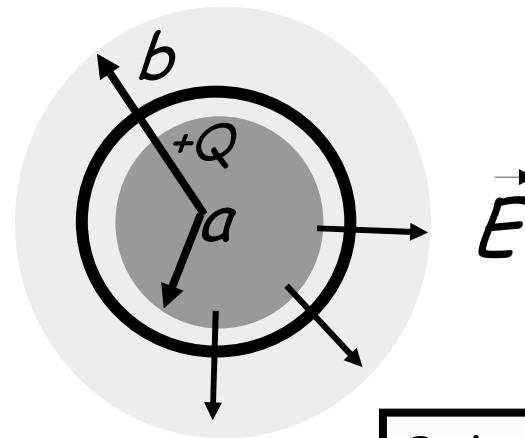
$\Rightarrow$ capaciteit: $C \equiv \frac{Q}{V} = \frac{2\pi a L \sigma \epsilon_0}{\sigma a \ln(b/a)} = \frac{2\pi L \epsilon_0}{\ln(b/a)}$

Gauss bolletje : $E_a 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E_a = \frac{\sigma a^2}{r^2 \epsilon_0}$

$\Rightarrow \vec{E}$ -veld: $\vec{E} = \vec{E}_r = \frac{\sigma a^2}{r^2 \epsilon_0} \hat{r}$

$\Rightarrow$ potentiaal: $V \equiv \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow \int_a^b \frac{\sigma a^2}{r^2 \epsilon_0} dr = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

$\Rightarrow$ capaciteit: $C \equiv \frac{Q}{V} = \frac{4\pi a^2 \sigma \epsilon_0}{\sigma a^2 (1/a - 1/b)} = 4\pi \epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$



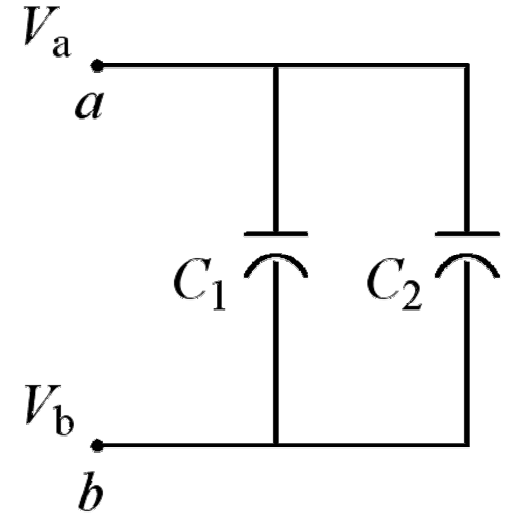
Boloppervlakken

- stralen a en b
- lading Q

Circuits: condensatoren

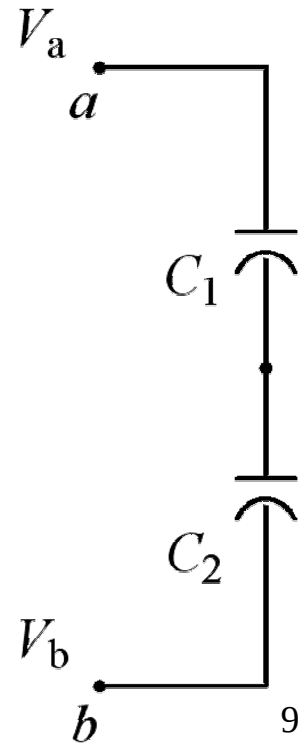
Parallel

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V$$
$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = C_1 + C_2$$



Serie

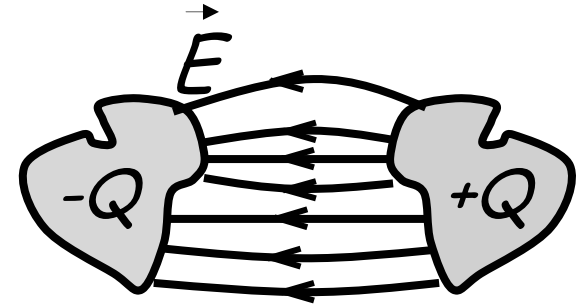
$$V = V_a - V_b = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$
$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{Q}{V} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



Energie

Condensator

$$\frac{Q}{V} = \text{constant} \equiv C \quad \text{en} \quad U = \frac{1}{2} CV^2$$



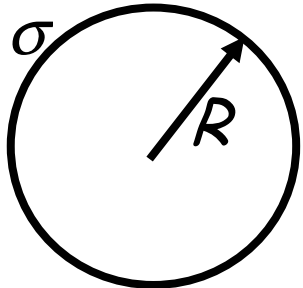
$$\text{potentiaal: } V \equiv \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V = Ed$$

$$\text{capaciteit: } C \equiv \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A \epsilon_0}{\sigma d} = \frac{A \epsilon_0}{d}$$

En dus

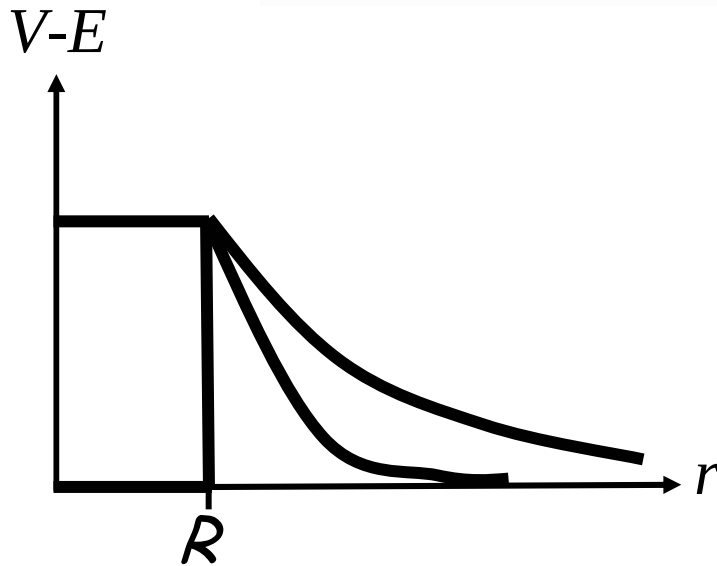
$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (Ad)$$

$$\Rightarrow u_e = \frac{\text{energie}}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$



Energie geladen boloppervlak

straal R en lading Q (dus $\sigma = Q/4\pi R^2$)



$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \begin{cases} r < R: -\vec{\nabla} \frac{R\sigma}{\epsilon_0} = 0 \\ r > R: -\vec{\nabla} \frac{R^2\sigma}{r\epsilon_0} = \frac{R^2\sigma}{r^2\epsilon_0} \hat{r} \end{cases}$$

1^e methode: via σ en potentiaal

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{oppervlak}} \sigma V d\sigma \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\text{oppervlak}} \sigma \frac{R\sigma}{\epsilon_0} d\sigma$$

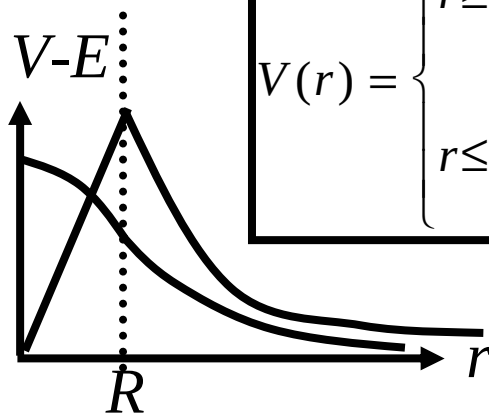
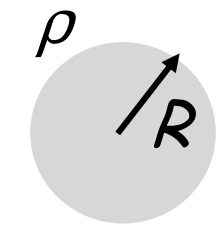
$$= \frac{1}{2} 4\pi R^2 \frac{R\sigma^2}{\epsilon_0} = \frac{Q^2}{8\pi R \epsilon_0}$$

2^e methode: via E-veld

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} E^2 dv \rightarrow \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r>R} \left(\frac{R^2\sigma}{r^2\epsilon_0} \right)^2 dv$$

$$= \frac{-4\pi\epsilon_0}{2} \frac{R^4\sigma^2}{r\epsilon_0^2} \Big|_R^\infty = \frac{Q^2}{8\pi R \epsilon_0}$$

Energie geladen bolvolume



$$V(r) = \begin{cases} r \geq R: V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} & \text{straal } R \text{ en lading } Q \\ & (\text{dus } \rho = 3Q/4\pi R^3) \\ r \leq R: V(r) = V(R) + \int_r^R \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(R) + \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + \left(\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} \right) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} \end{cases}$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} E^2 dv = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \left(\int_0^R \frac{\rho^2 r^4}{9\epsilon_0} dv + \int_R^{\infty} \frac{\rho^2 R^6}{9\epsilon_0 r^4} dv \right)$$

$$U_{\text{oppervlak}} = \frac{Q^2}{8\pi R\epsilon_0} = \frac{3Q^2}{24\pi R\epsilon_0}$$

$$U_{\text{volume}} = \frac{3Q^2}{20\pi R\epsilon_0}$$

veld

$$\left(\frac{R^5}{3} + \frac{\rho^2 R^6}{9\epsilon_0^2 R} \right) = \frac{4\pi}{15} \frac{\rho^2 R^5}{\epsilon_0}$$

entiaal V

$$\left(\frac{R^5}{3} - \frac{R^5}{15} \right) = \frac{4\pi}{15} \frac{\rho^2 R^5}{\epsilon_0}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{bolvolume}} \rho V dv = \frac{1}{2} \int_{\text{bolvolume}} \rho V dv$$

Lading op oppervlak heeft laagste energie

3^e methode: laagsgewijs: straal r "groeit" van r=0 naar r=R

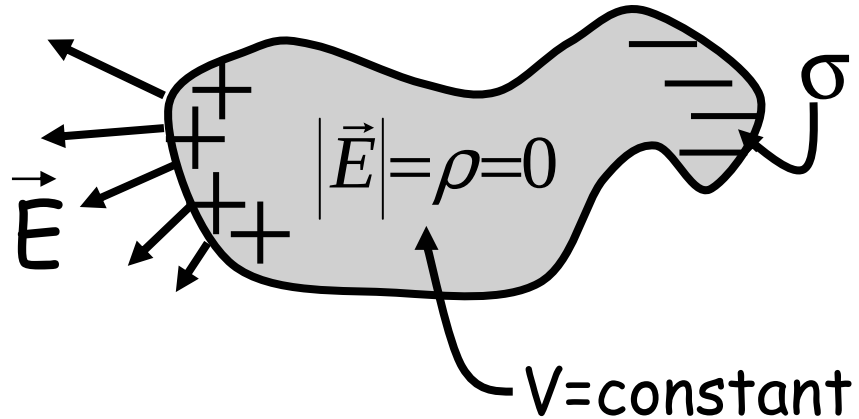
$$dq = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow dU = V(r) dq = \frac{\rho^2 r^2}{3\epsilon_0} 4\pi r^2 dr \Rightarrow U = \int_0^R \frac{\rho^2 r^2}{3\epsilon_0} 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{15} \frac{\rho^2 R^5}{\epsilon_0}$$

Wat heb ik geleerd?

Materialen:

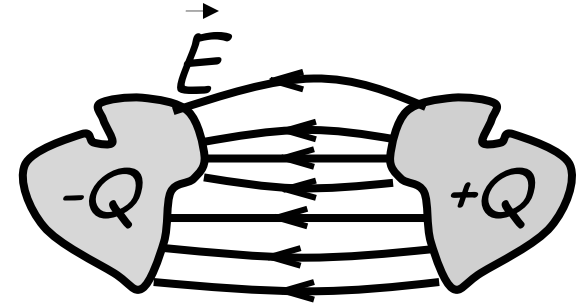
- Geleider

E via Gauss (symmetrie)



Condensator

$$\frac{Q}{V} = \text{constant} \equiv C \quad \text{en} \quad U = \frac{1}{2} C V^2$$



Energie
ladingsverdeling

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \int_{\text{volume}} \rho V dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} E^2 dv$$

Isolator (Dielektricum)

De polarisatie microscopisch bekeken

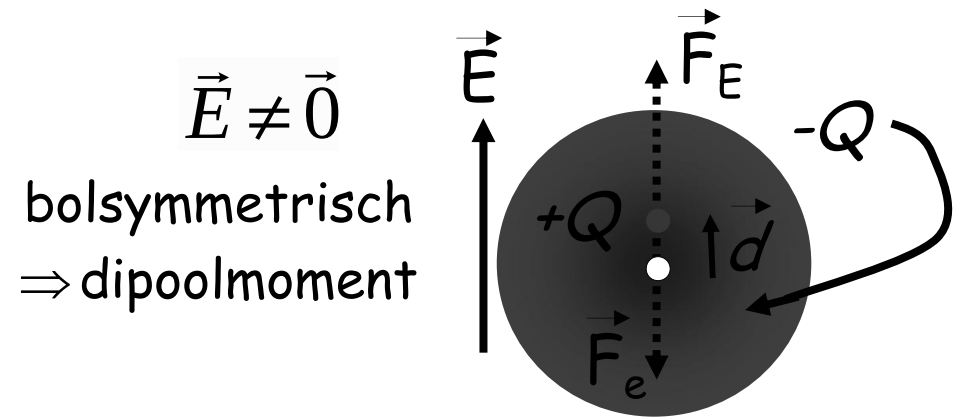
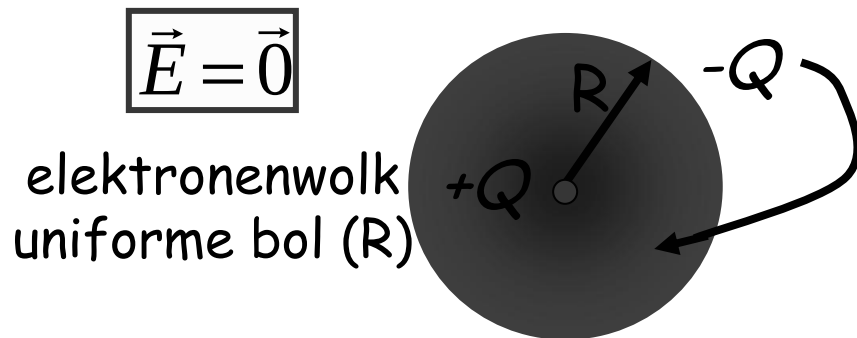
Polarisatie en “gebonden” lading

De elektrische verschuiving D

Lineaire isolatoren

Voorbeelden: energie en kracht

Polarisatie neutraal atoom



$\alpha \equiv$ "polariseerbaarheid" $\vec{p} \equiv Q\vec{d} \propto \vec{E}$ en $\frac{|\vec{p}|}{|\vec{E}|} \equiv \alpha$

Bereken verplaatsing van de kern $\vec{d}$

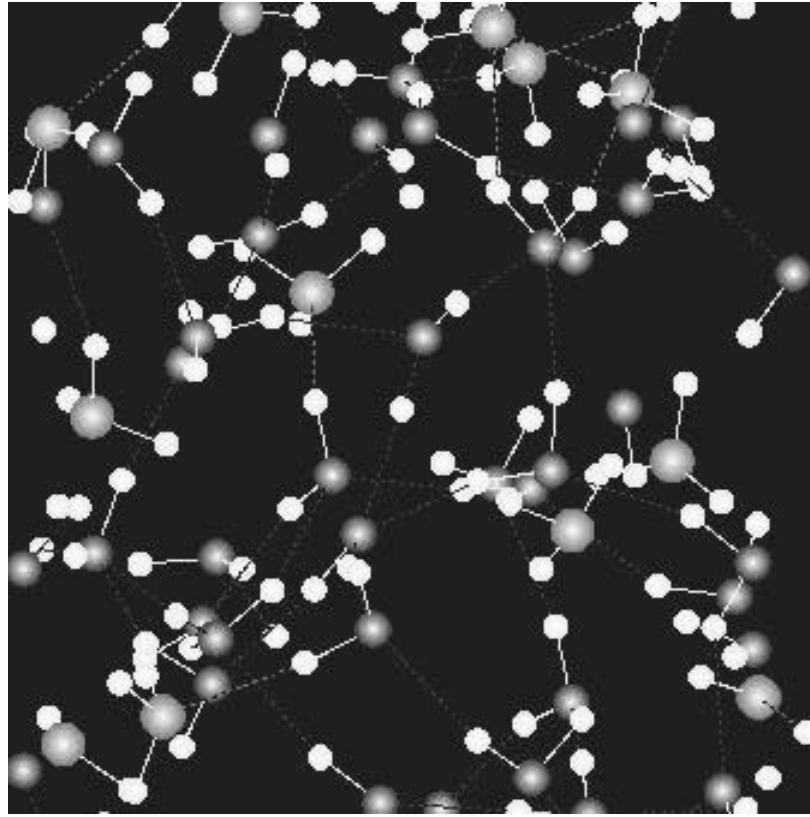
$$\vec{0} = \vec{F}_Q \equiv \vec{F}_Q^E + \vec{F}_Q^e \left\{ \begin{array}{l} \text{Elektronen: } \vec{F}_Q^e = Q \frac{\rho \vec{d}}{3\epsilon_0} = -Q \frac{Q\vec{d}}{4\pi R^3 \epsilon_0} \\ \text{E-veld: } \vec{F}_Q^E = Q\vec{E} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{p} \equiv Q\vec{d} = \vec{E} 4\pi R^3 \epsilon_0 \Rightarrow \alpha = 4\pi R^3 \epsilon_0$$

Kern lading

Element	Z	α/ϵ_0
Helium	2	$3 \times 10^{-30} \text{ m}^3$
Neon	10	$5 \times 10^{-30} \text{ m}^3$
Argon	18	$20 \times 10^{-30} \text{ m}^3$
Waterdamp		$500 \times 10^{-30} \text{ m}^3$

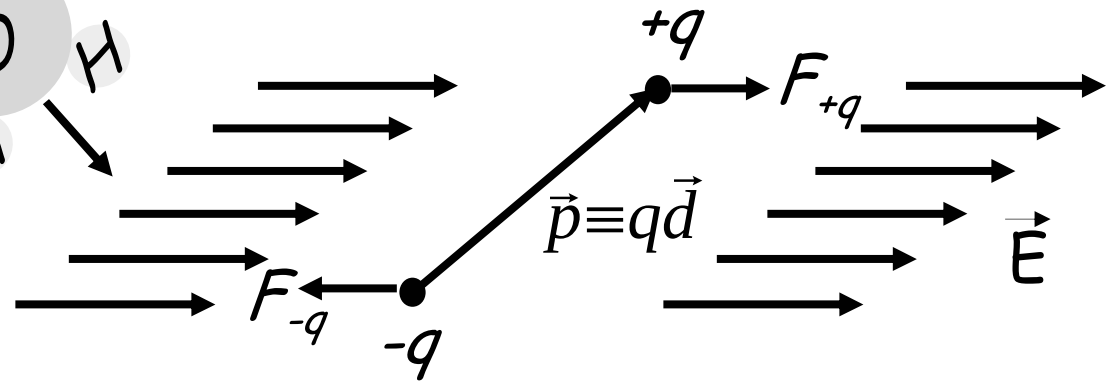
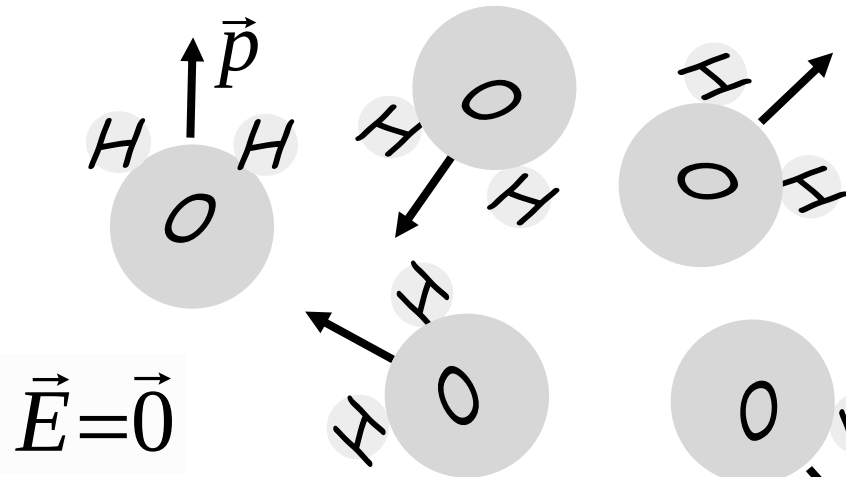
Ammoniak in water



Polaire moleculen

Polarisatie polair molecuul

Moleculen intrinsiek dipoolmoment p
 Voor $E=0$: oriëntatie p random
 Voor $E \neq 0$: oriëntatie $p \parallel E$

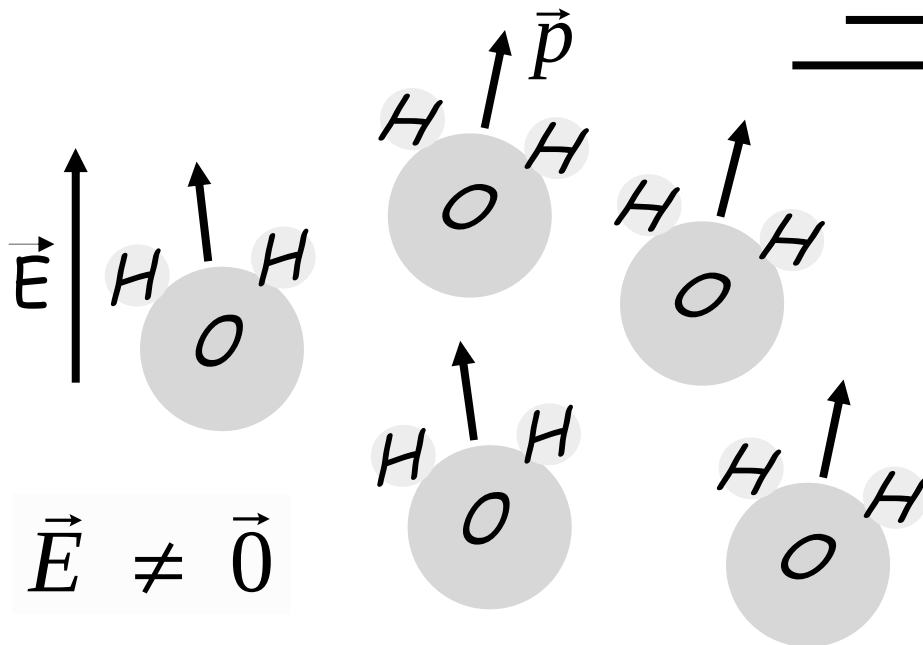


Kracht :

$$\vec{F} = \vec{F}_{+q} + \vec{F}_{-q} = q\vec{E} - q\vec{E} = \vec{0}$$

Moment:

$$\vec{M} = \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_{+q} - \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_{-q} = q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$



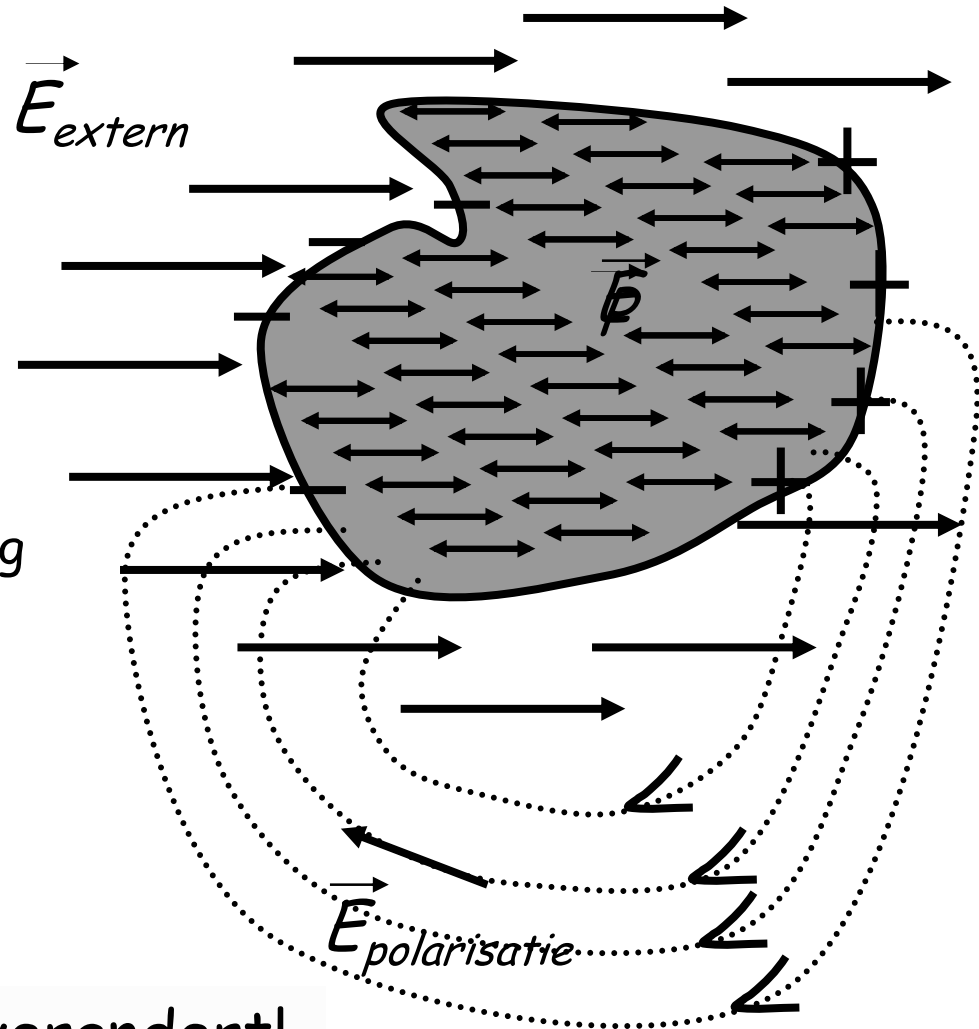
Materie: de isolator

Isolator: geen vrije ladingdragers!

Karakteristieken in $\vec{E}$ -veld:

- materie polariseert d.w.z. atomaire dipooltjes $\vec{p}$
- polarisatie geeft ladingsscheiding + lading in richting $\vec{p}$
 - lading tegengesteld $\vec{p}$
- deze lading genereert $\vec{E}$ -veld: tegengesteld externe $\vec{E}$ -veld

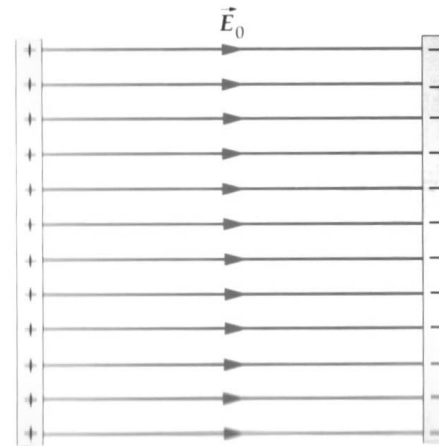
Tenslotte: originele $\vec{E}$ -veld verandert!



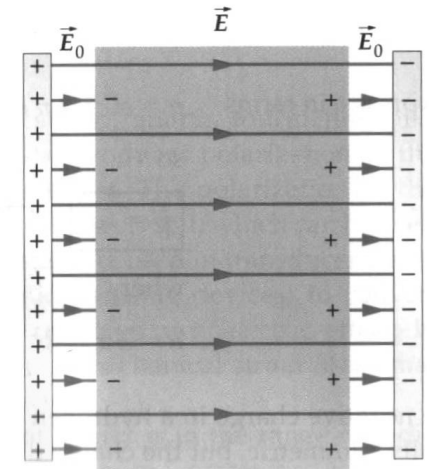
Condensator met dielektricum

Elektrische veld neemt af met factor κ , de diëlektrische constante, als

$$\vec{E} = \vec{E}_0 / \kappa$$



(a)



(b)

Potentiaalverschil tussen de platen

$$V = Ed = \frac{E_0 d}{\kappa} = \frac{V_0}{\kappa} \Rightarrow C$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (Ad)$$

$$\Rightarrow u_e = \frac{\text{energie}}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 E^2$$

Plaatcondensator
 ϵ permittiviteit

$$C \equiv \frac{Q}{V} =$$

$\frac{Q}{a}$ $\frac{Q}{a}$

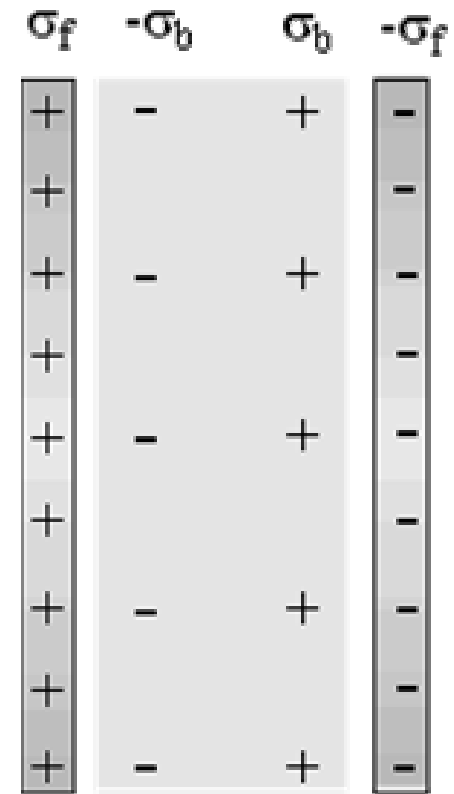
Diëlektricum en gebonden lading

Elektrische veld t.g.v. vrije en gebonden ladingen

$$E_0 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \quad \text{en} \quad E_b = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0}$$

Netto elektrisch veld

$$E = E_0 - E_b = \frac{E_0}{\kappa} \Rightarrow E_b = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) E_0$$
$$\Rightarrow \sigma_b = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \sigma_f$$

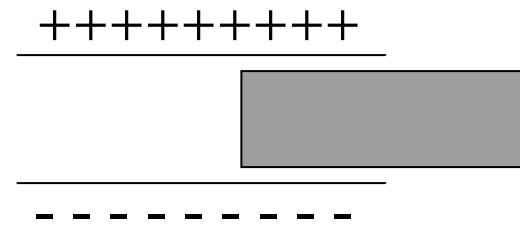


Gebonden lading is altijd kleiner dan de vrije lading.

Discussievraag 6

Een diëlektrische plaat bevindt zich voor de helft in een geladen condensator. De condensator is geïsoleerd van de omgeving. Op de plaat werkt:

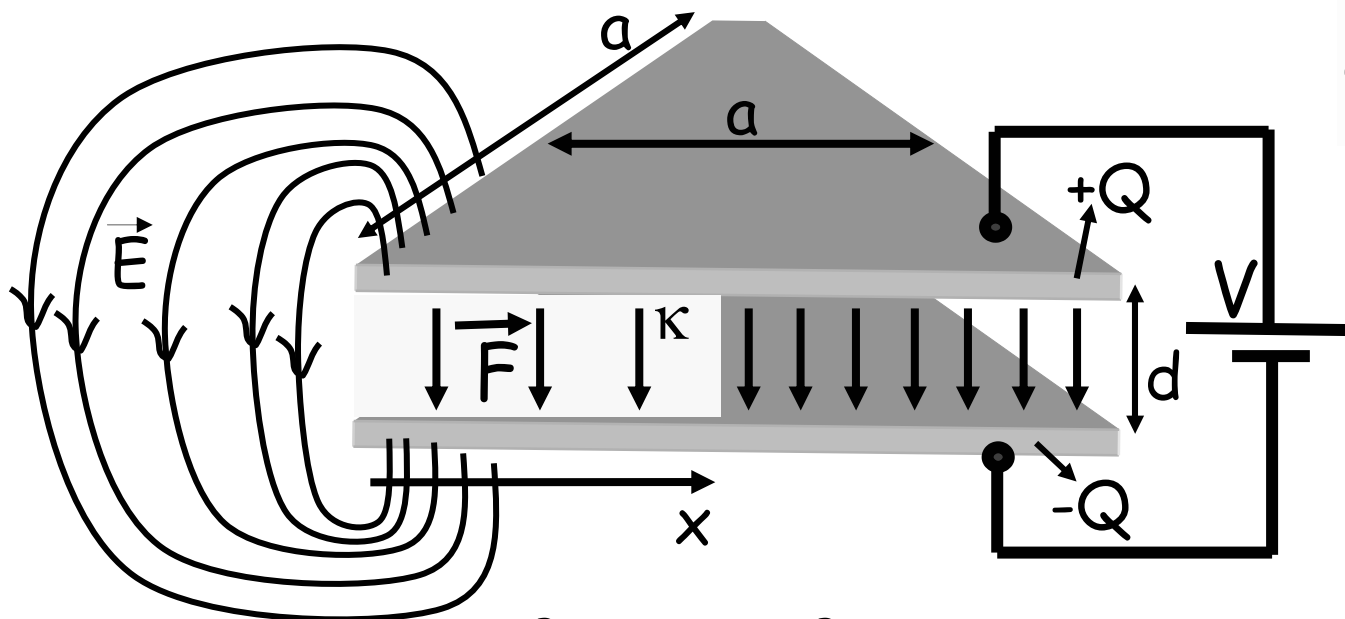
- A geen kracht
- B een kracht naar links
- C een kracht naar rechts



Isolatoren: energie en kracht

Vacuüm: $U = \frac{1}{2} C_{\text{vacuum}} V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{\text{vacuum}}}$

Isolator: $U \rightarrow U = \frac{1}{2} \kappa C_{\text{vacuum}} V^2$



$$C(x) = \frac{a^2 \epsilon_0}{d} + \frac{ax(1 - \kappa \epsilon_0)}{d}$$

Gevraagd:

- Kracht F op isolator

Aanpak:

1. Via $U(x) \Rightarrow F = -dU/dx$

Opties:

A. Q constant

B. V constant (lastig!)

A: $\Delta U = \Delta \frac{Q^2}{2C} = -\frac{Q^2}{2C^2} \Delta C = -\frac{Q^2}{2C^2} \frac{a(1 - \kappa \epsilon_0)}{d} \Delta x \Rightarrow F \equiv -\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{a(1 - \kappa \epsilon_0)}{d}$

Condensator

Batterij doet werk!

B: $\Delta U = \Delta \frac{CV^2}{2} - \Delta(QV) = \frac{V^2}{2} \Delta C - V^2 \Delta C = -\frac{Q^2}{2C^2} \Delta C \Rightarrow F = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{a(1 - \kappa \epsilon_0)}{d}$