

Inhoud

Elektrostatica

1. Wet van Coulomb: vergelijking voor elektrische kracht
2. Wet van Gauss: vergelijking voor elektrisch veld
- 3. Elektrische potentiaal

PFSAE:

- Gradiënt: §23.3
- Potentiaal V: §23.2 en §23.4
- Energie & Arbeid: §24

Potentiaal

De potentiaal
Voorbeelden

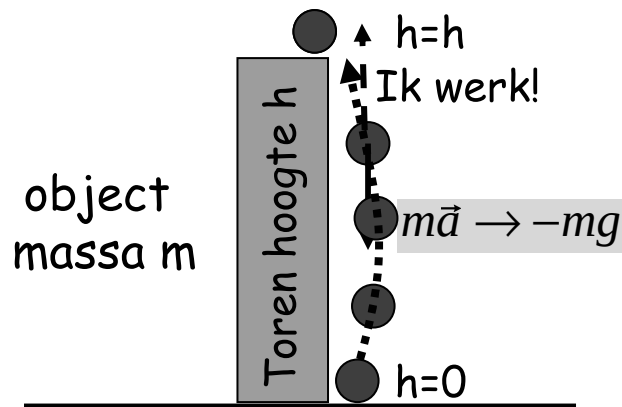
(Elektrische) Potentiële Energie

Hoe bepaal je potentiële energie?

Even terug naar Newton en de Zwaartekracht!

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{Arbeid (Work):} \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Hoeveel Arbeid nodig om massa m van hoogte $h=0$ op hoogte $h=h$ te brengen?



$$W = \int_0^h \vec{F} \cdot d\vec{h} = +mgh$$

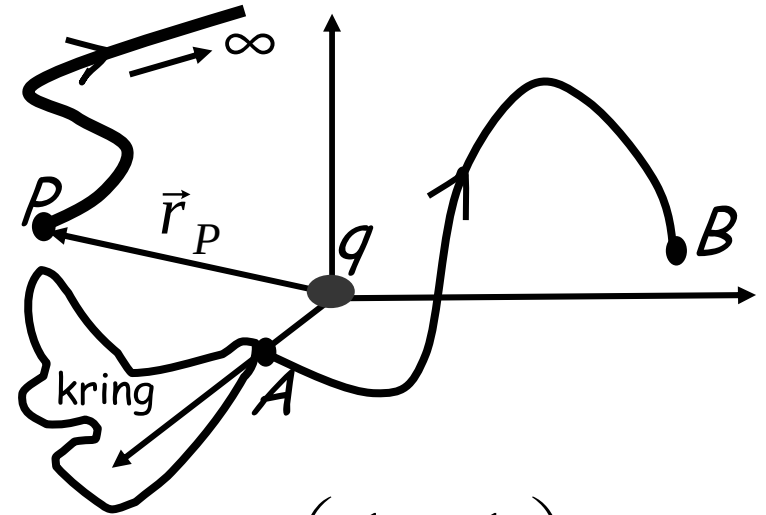
Verskil in potentiële energie $\equiv$ Benodigde Arbeid
(Let op: dit is de arbeid die ik moet verrichten!)

Laten we dit principe nu eens toepassen om de elektrische potentiële energie te bestuderen!

Elektrische Potentiële Energie

Kracht om een puntlading Q te bewegen in veld $\vec{E}$ van de puntlading q : $\vec{F} = Q\vec{E} = Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

Benodigde Arbeid voor Q van $A \rightarrow B$
(verschil in potentiële energie)



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = U_{AB}$$

$$W_{kring} = Q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Omdat $\vec{E} \parallel \vec{r}$ alleen radiële bijdrage

Aan ieder punt P kun je een getal $V_P \equiv U_P/Q$ toekennen:

$$V_P \equiv \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_P} \int_{r_P}^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_P}$$

De elektrische potentiaal V wordt dus bepaald door $\vec{E}$,
(wanneer we het 'ijkpunt' van de potentiaal V slim kiezen)

Potentiaal V

Potentiaal verschil: $V_{AB} = V_B - V_A = \int_B^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Eindpunten A en B bepalen V_{AB}
beschouw X, Y, Z componenten: $-V_{AB} = \int_{X_A}^{X_B} E_X dx + \int_{Y_A}^{Y_B} E_Y dy + \int_{Z_A}^{Z_B} E_Z dz$

Differentieer $V_p(X, Y, Z)$:
$$\begin{pmatrix} \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial V / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_X^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} E_X dx \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_X \\ -E_Y \\ -E_Z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_P = -\vec{\nabla} V_P}$$

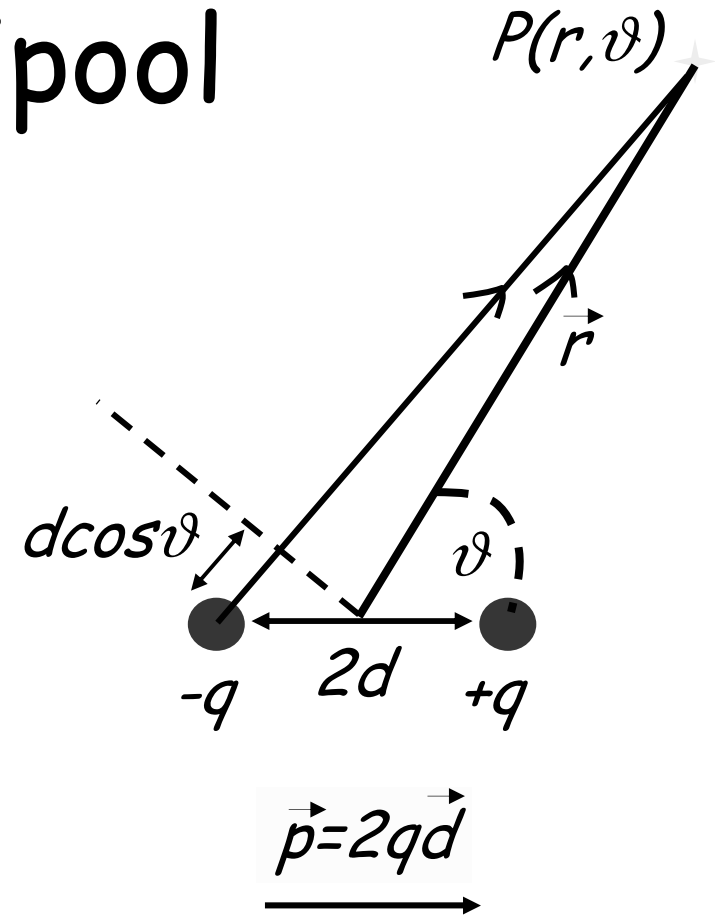
Controle: $\int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l} = V_B - V_A \equiv \int_B^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Dus Gradiënt van V , bepaalt $\vec{E}$

V.b. potentiaal dipool

Coördinaten voor punt P: (r, ϑ) :

$$\begin{aligned} V_P(r, \vartheta) &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r-d\cos\vartheta} - \frac{1}{r+d\cos\vartheta} \right) \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d\cos\vartheta}{r^2} = \frac{2qd\cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &\equiv \frac{p\cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$



Bereken nu E via de potentiaal V :

$$\begin{aligned} \vec{E}_P(r, \vartheta) &\equiv -\vec{\nabla} V_P(r, \vartheta) = -\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{xp_x + yp_y + zp_z}{r^3}, \dots \right) \\ &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p_x}{r^3} - \frac{3x(xp_x + yp_y + zp_z)}{r^5}, \dots \right) = \frac{-\vec{p} + 3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{p})}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

Grafisch: elektrische veldlijnen equipotentiaalijnen

Veldlijnen, equipotentiaal lijnen etc.

Elektrische veldlijnen:

Lijnenpatroon die richting en sterkte van het elektrisch veld weergeeft

Equipotentiaalijnen:

Collectie van krommen waarbij langs iedere kromme de potentiaal een constante waarde heeft

Omdat $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ en omdat $\vec{\nabla}V$ de richting aangeeft waarin V het sterkst verandert staat $\vec{E} \perp$ krommen met $V = \text{constant}$!

Discussievraag 3

Voor een puntlading geldt $E \sim 1/r^2$ en $V \sim 1/r$

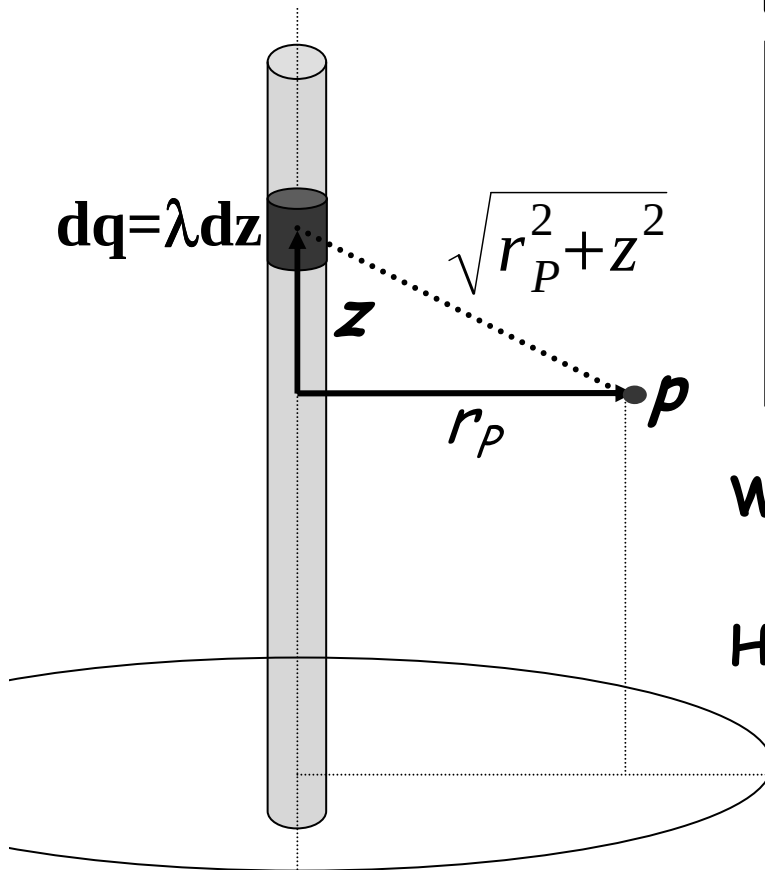
Voor een lijnlading geldt $E \sim 1/r$ je verwacht voor V :

- A $V = \text{constante}$
- B $V \sim \ln r$
- C $V \sim 1/r$
- D $V \sim r$

V.b. potentiaal ∞ lange draad

Bereken V_P direct:

$$\begin{aligned} V_P(r_P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz}{\sqrt{r_P^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow \text{ongedefinieerd!} \end{aligned}$$



Wat mis?

Uitdrukking V geldt indien $V(\infty)=0$!

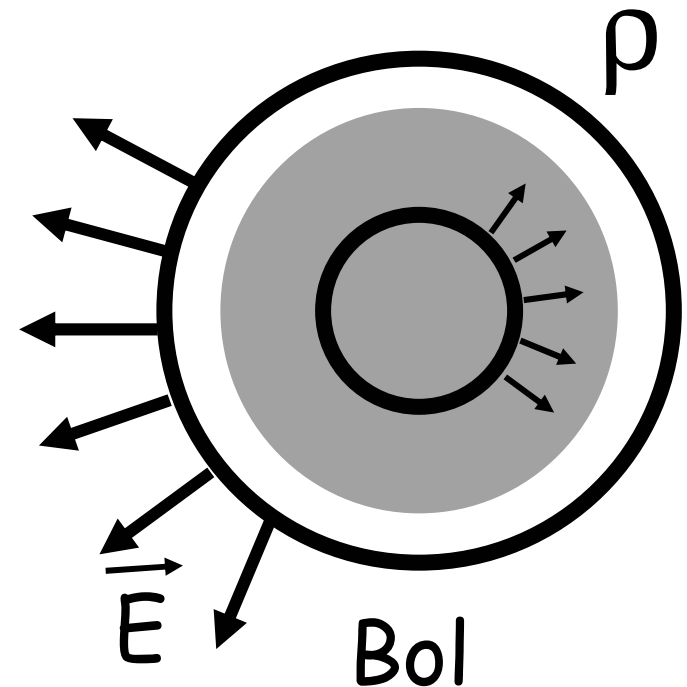
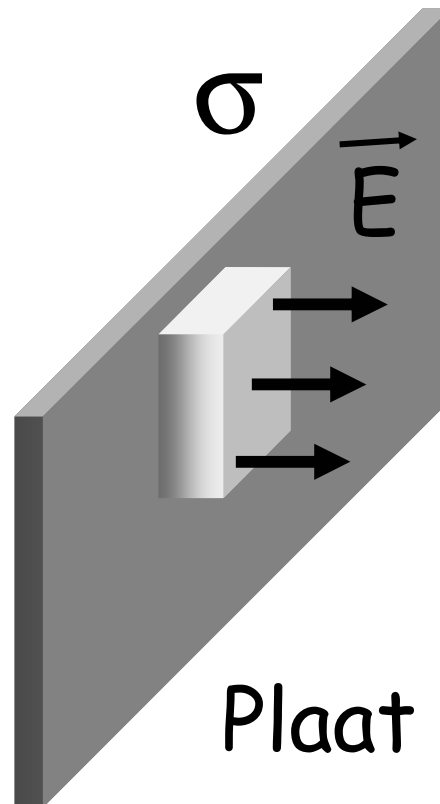
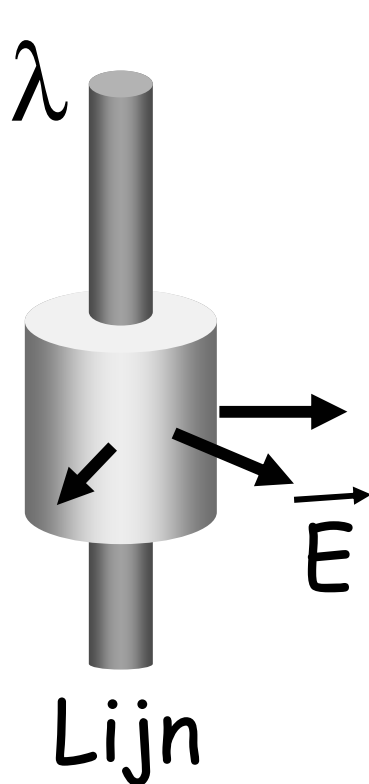
Hoe wel?

Kies $V=0$ referentie punt anders:
b.v. @ $r=1$ i.p.v. @ $r = \infty$

Overzicht toepassingen wet van Gauss

$$\Phi_E \equiv \oint_{\text{oppervlak } O} \vec{E} \cdot d\hat{o} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{omsloten}} Q_i$$

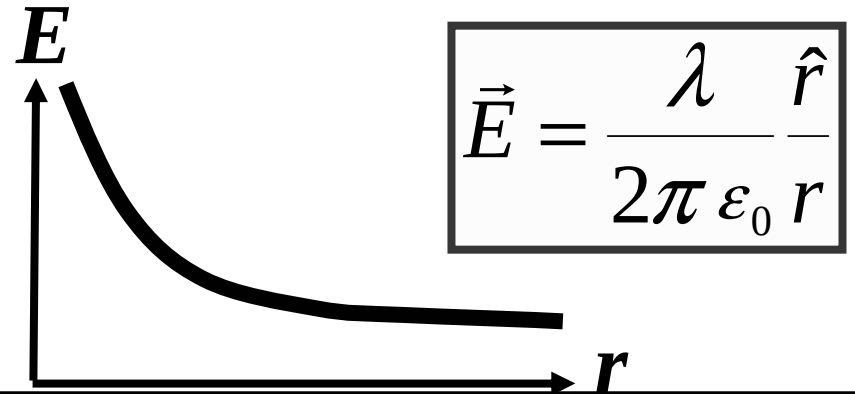
Symmetrie
voor E-veld
de essentie!



V.b. Gauss: dunne draad

Dunne ∞ draad:

- ladingsverdeling: λ C/m
- symmetrie: $\vec{E} \perp$ draad, $E(r)$
- "Gauss box": cilindertje



Flux :

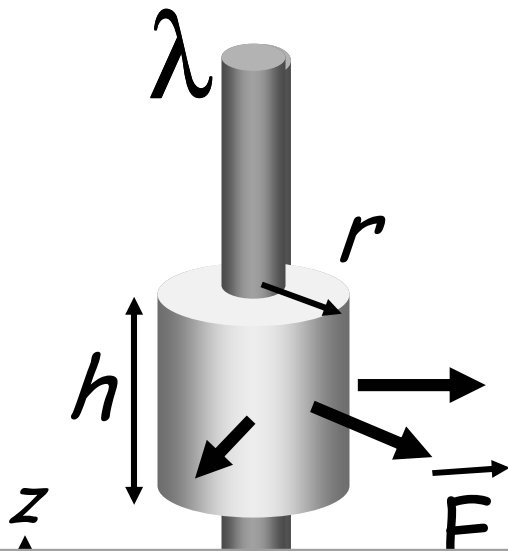
deksels cilinder: $\Phi_E = 0$ want: $\vec{E} \perp d\vec{o}$

wand cilinder : $\Phi_E = 2\pi r h E$

Wet van Gauss :

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{\text{omsloten}} \Rightarrow 2\pi r h E \equiv \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

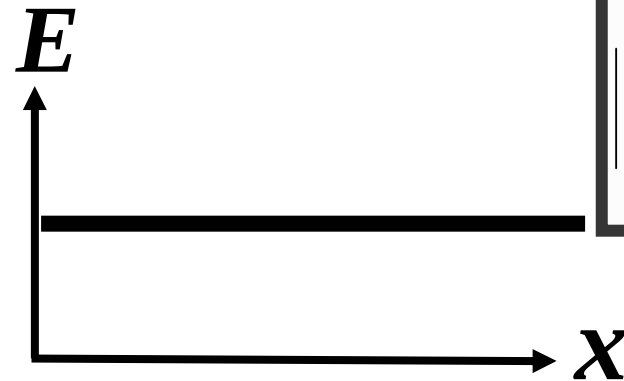
$$V_P \equiv \int_P^{r=1} \vec{E}_P(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_P^{r=1} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r \Big|_{r_P}^1 = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r_P$$



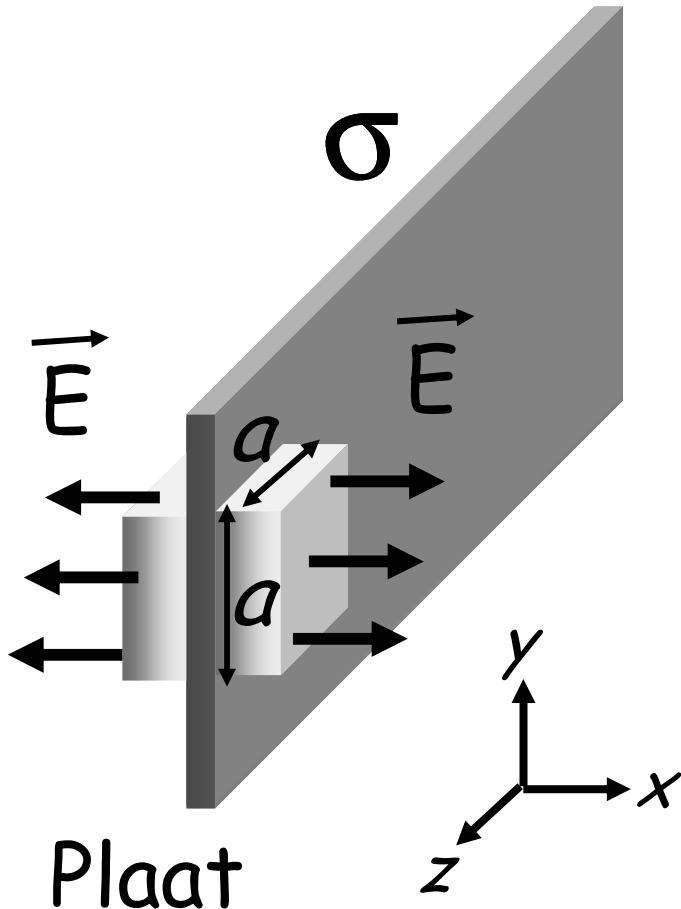
V.b. Gauss: vlakke plaat

Vlakke ∞ plaat:

- ladingsverdeling: $\sigma \text{ C/m}^2$
- symmetrie: $E \perp \text{vlak}$, $E(z)$
- "Gauss box": kubusje



$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



Flux :

voor/achterkant: $\Phi_E = 0$ want: $\vec{E} \perp d\vec{o}$

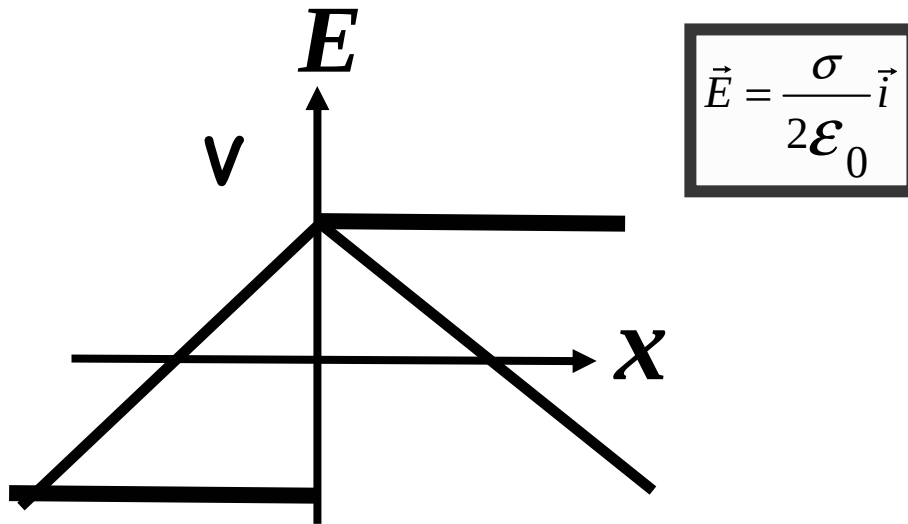
boven/onderkant: $\Phi_E = 0$ want: $\vec{E} \perp d\vec{o}$

zijanten: $\Phi_E = a^2 E + a^2 E = 2 a^2 E$

Wet van Gauss:

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{\text{omsloten}} \Rightarrow 2 a^2 E \equiv \frac{a^2 \sigma}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Potentiaal vlakke plaat

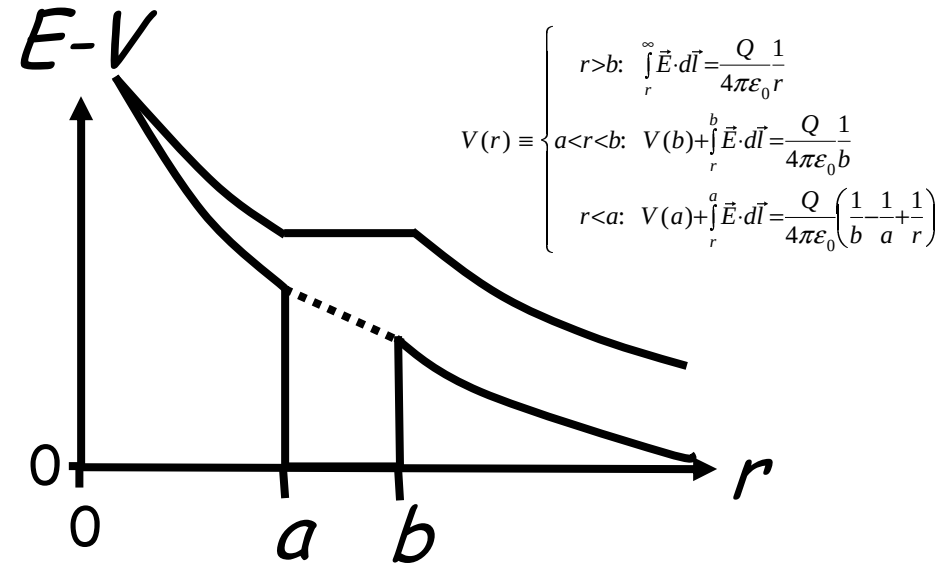
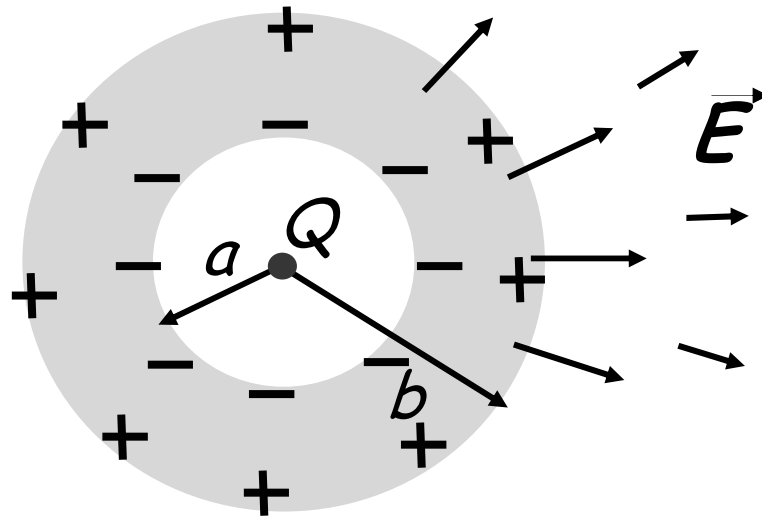


$$V(x) - V(0) = - \int_0^x \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^x \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} \cdot dx \vec{i} = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^x dx = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x$$

En dus $V(x) = V(0) - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x, \quad x > 0$

Evenzo $V(x) = V(0) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x, \quad x < 0$

Puntlading met geleidende bolschil



Symmetrie: E-veld radieel $\Rightarrow$ wet van Gauss

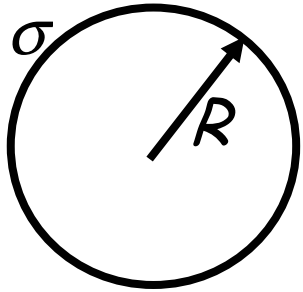
$$\left\{ \begin{array}{l} r < a: \text{Gauss bol} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \\ a < r < b: |\vec{E}| = 0, \text{ Gauss bol} \Rightarrow 0 = \frac{Q}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{\text{lading } r=a} dq \Rightarrow \sigma_a = \frac{-Q}{4\pi a^2} \\ r > b: \oint_{\text{geleider}} dq = 0 \Rightarrow \sigma_b = \frac{+Q}{4\pi b^2} \text{ Gauss bol} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \end{array} \right.$$

III: Wat heb ik geleerd?

Kracht, $\vec{E}$ -Veld
en Potentiaal

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \text{ en } \begin{cases} \text{puntlading: } \vec{E} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ en } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \text{dipool: } \vec{E} = \frac{3\hat{r}(\vec{p}\cdot\hat{r}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ en } V = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{cases}$$

Gradiënt $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$



Potentiaal geladen boloppervlak

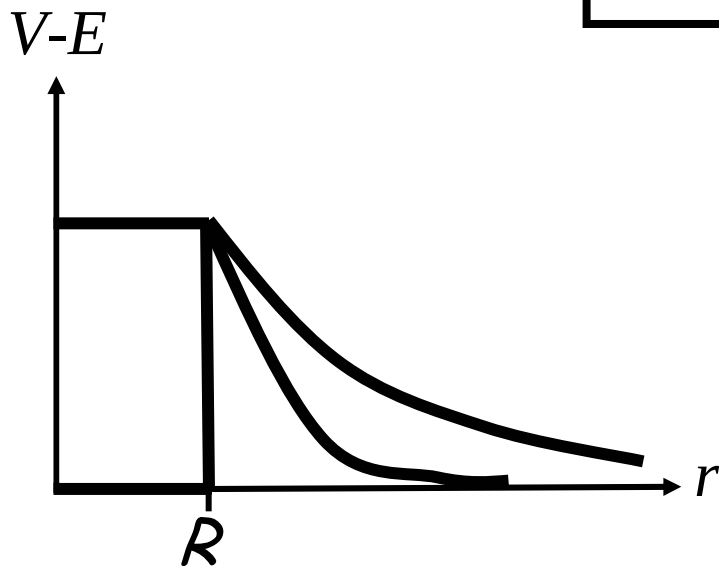
straal R en lading Q (dus $\sigma = Q/4\pi R^2$)

$$\vec{E} = \begin{cases} r \leq R: \vec{E} = 0 \\ r \geq R: \vec{E} = \frac{\sigma R^2 \hat{r}}{r^2 \epsilon_0} \end{cases}$$

Flux: $\Phi_E = 4\pi r^2 E$

Wet van Gauss:

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{omsloten}} Q \Rightarrow \begin{cases} r < R: 4\pi r^2 E \equiv \frac{0\sigma}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = 0 \\ r > R: 4\pi r^2 E \equiv \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\sigma R^2}{r^2 \epsilon_0} \end{cases}$$

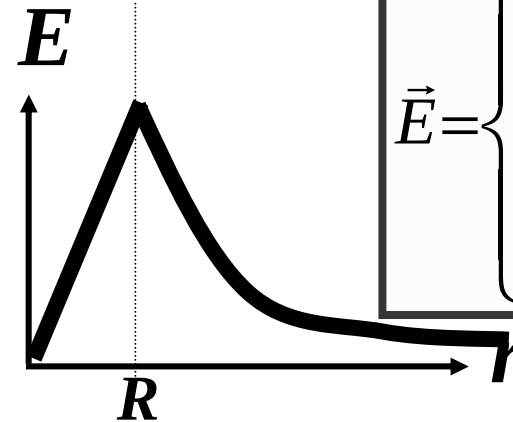


$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \begin{cases} r < R: -\vec{\nabla} \frac{R\sigma}{\epsilon_0} = 0 \\ r > R: -\vec{\nabla} \frac{R^2 \sigma}{r \epsilon_0} = \frac{R^2 \sigma}{r^2 \epsilon_0} \hat{r} \end{cases}$$

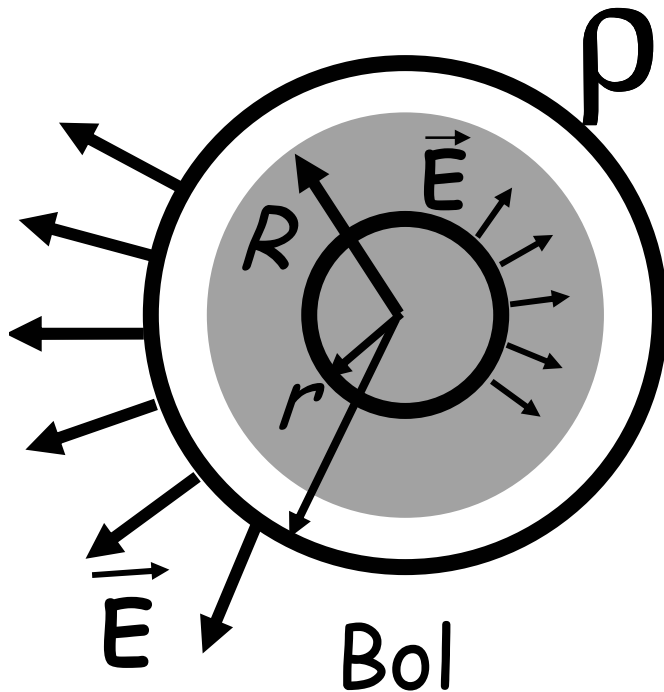
V.b. Gauss: bolvolume

Bolvolume:

- ladingsverdeling: $\rho \text{ C/m}^3$
- symmetrie: $E \perp \text{bol}$, $E(r)$
- "Gauss box": bolletje



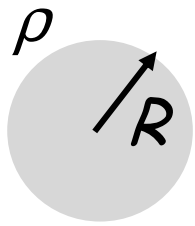
$$\vec{E} = \begin{cases} r \leq R: \vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} \\ r \geq R: \vec{E} = \frac{\rho R^3 \hat{r}}{3\epsilon_0 r^2} \end{cases}$$



Flux : $\Phi_E = 4\pi r^2 E$

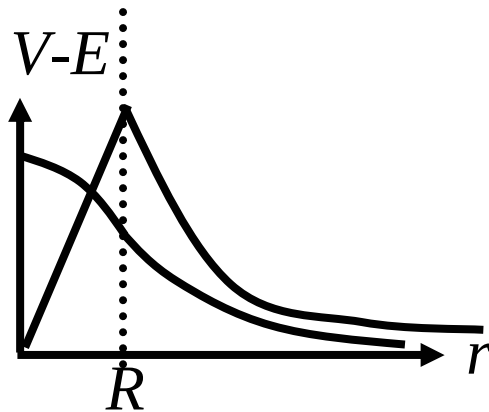
Wet van Gauss :

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{\text{omsloten}} \Rightarrow \begin{cases} r < R: 4\pi r^2 E \equiv \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \\ r > R: 4\pi r^2 E \equiv \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \end{cases}$$



Potentiaal geladen bolvolume

straal R en lading Q
(dus $\rho = 3Q/4\pi R^3$)



$$\vec{E} = \begin{cases} r \leq R: \vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} \\ r \geq R: \vec{E} = \frac{\rho R^3 \hat{r}}{3\epsilon_0 r^2} \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} r \geq R: V(r) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \\ r \leq R: V(r) = V(R) + \int_r^R \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(R) + \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + \left(\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} \right) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} \end{cases}$$