Inhoud

Elektrostatica

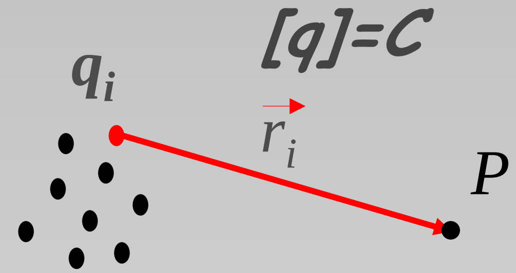
1. **Wet van Coulomb: vergelijking voor elektrische kracht**
2. Wet van Gauss: vergelijking voor elektrisch veld
3. **Elektrische potentiaal**
4. **Veldvergelijkingen nader bekeken:** $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ & $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$
5. **Elektrische velden in materie: Geleiders**
6. **Potentiaal vergelijkingen**
7. **Elektrische velden in materie: Isolatoren**

PFSAE:

- Coordinaten:
  - Cartesisch: die ken je hopelijk al!
  - Bol: §22.3 (definitie en volume elementje)
  - Cilinder: §22.3 (definitie en volume elementje)
- Wet van Gauss: §22.6 afleiding

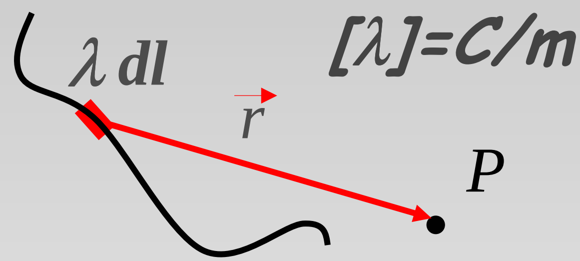
Ladingsverdeling $\Rightarrow$ E-veld

Diskreet:

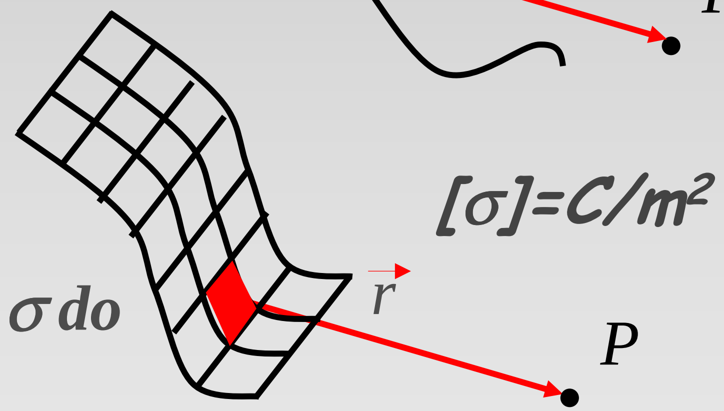


$$\vec{E}_P \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

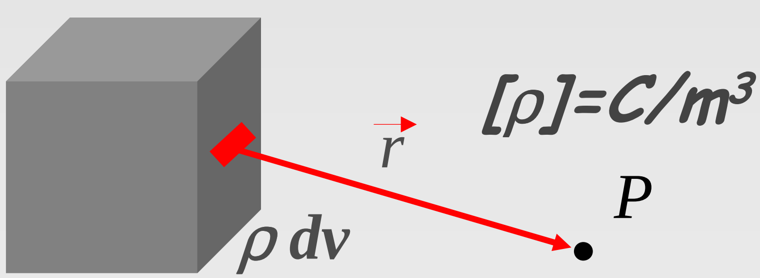
Continu:



$$\vec{E}_P \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{lijn} dl\,\frac{\lambda}{r^2}\hat{r}$$



$$\vec{E}_P \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{oppervlak} do\,\frac{\sigma}{r^2}\hat{r}$$

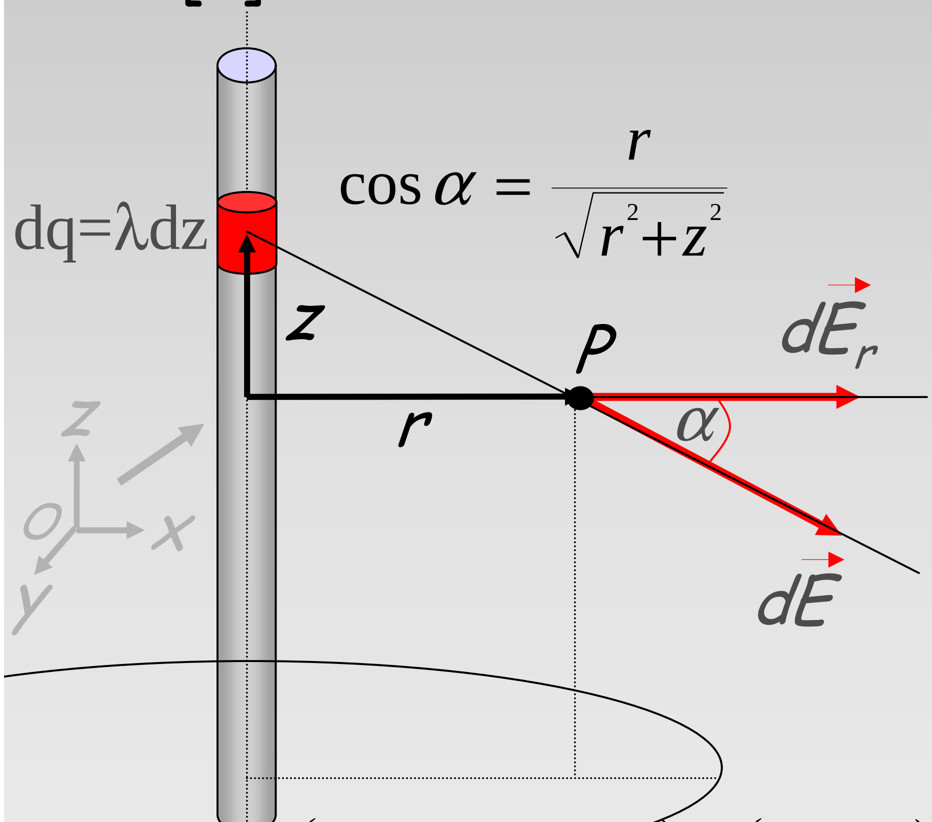


$$\vec{E}_P \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{volume} dv\,\frac{\rho}{r^2}\hat{r}$$

V.b. E-veld ∞ lange draad

Lijnlading:

- homogeen geladen draad
- ladingsdichtheid $dq=\lambda dz$
- $[\lambda]=C/m$



$$\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

Berekening E-veld:

- nadenken:
  cilinder symmetrie: (rφz)
- rekenen:

$$\left|\vec{E}_P\right| = \left|\int_{lijn} d\,\vec{E}_r\right| \qquad \boxed{\vec{E}} \qquad \boxed{\cos\alpha}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0\left[r^2+z^2\right]} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \left.\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty}$$

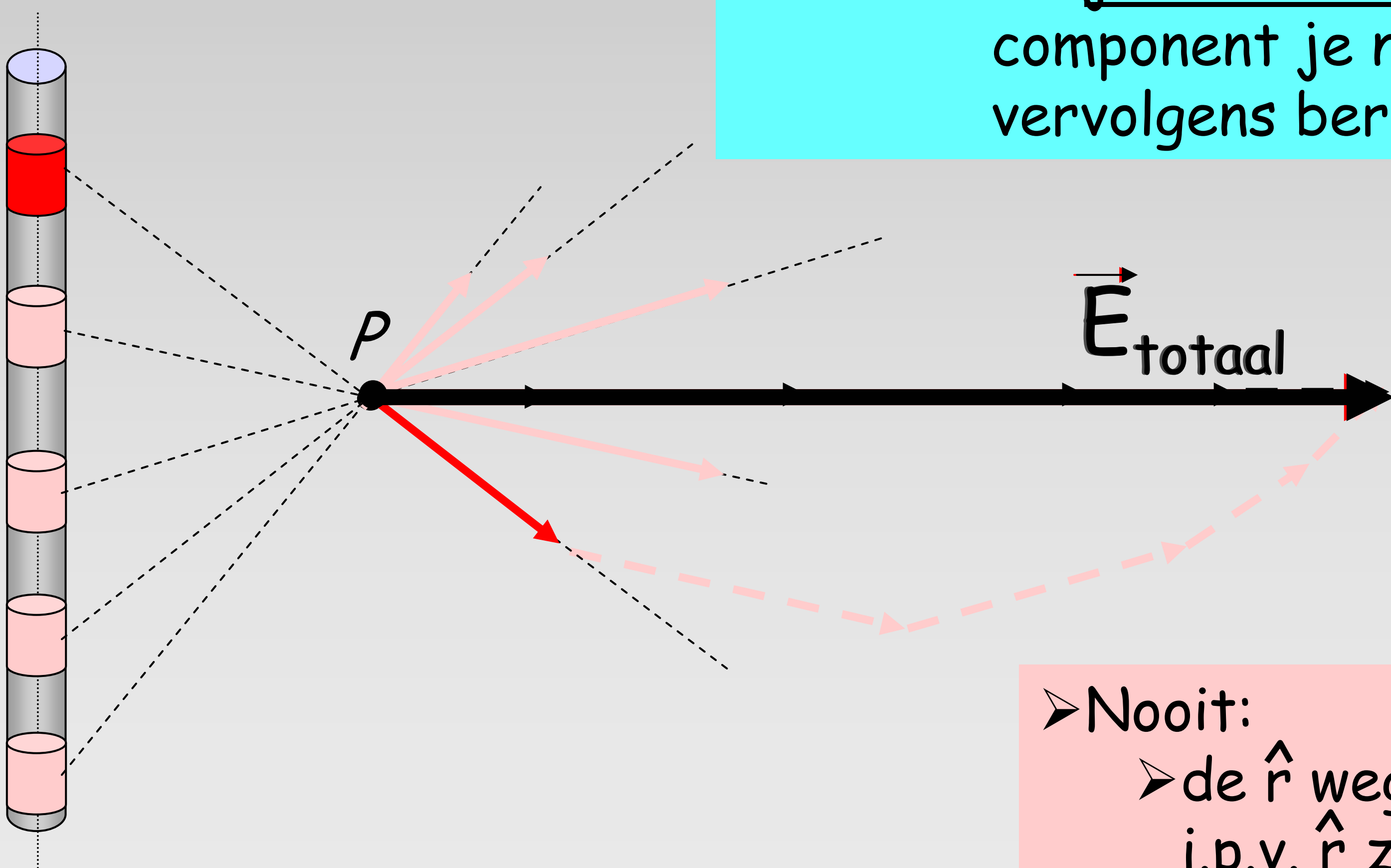
$$= \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} - z\times\frac{2z}{2\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{r^2+z^2-z^2}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}\right) = \frac{r}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Getallen ↔ vectoren

$$\vec{E}_P \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{lijn} dl \, \frac{\lambda}{r^2} \, \hat{r}$$

- Let op:
  - Integrant is een vector, d.w.z.
    - Of: je berekent E_x, E_y en E_z (werk: 3 integralen i.p.v. 1)
    - Of: je beredeneert welke component je nodig hebt en vervolgens bereken je die!



- Nooit:
  - de $\hat{r}$ weglaten d.w.z. i.p.v. $\hat{r}$ zelf $|\hat{r}|=1$ lezen!

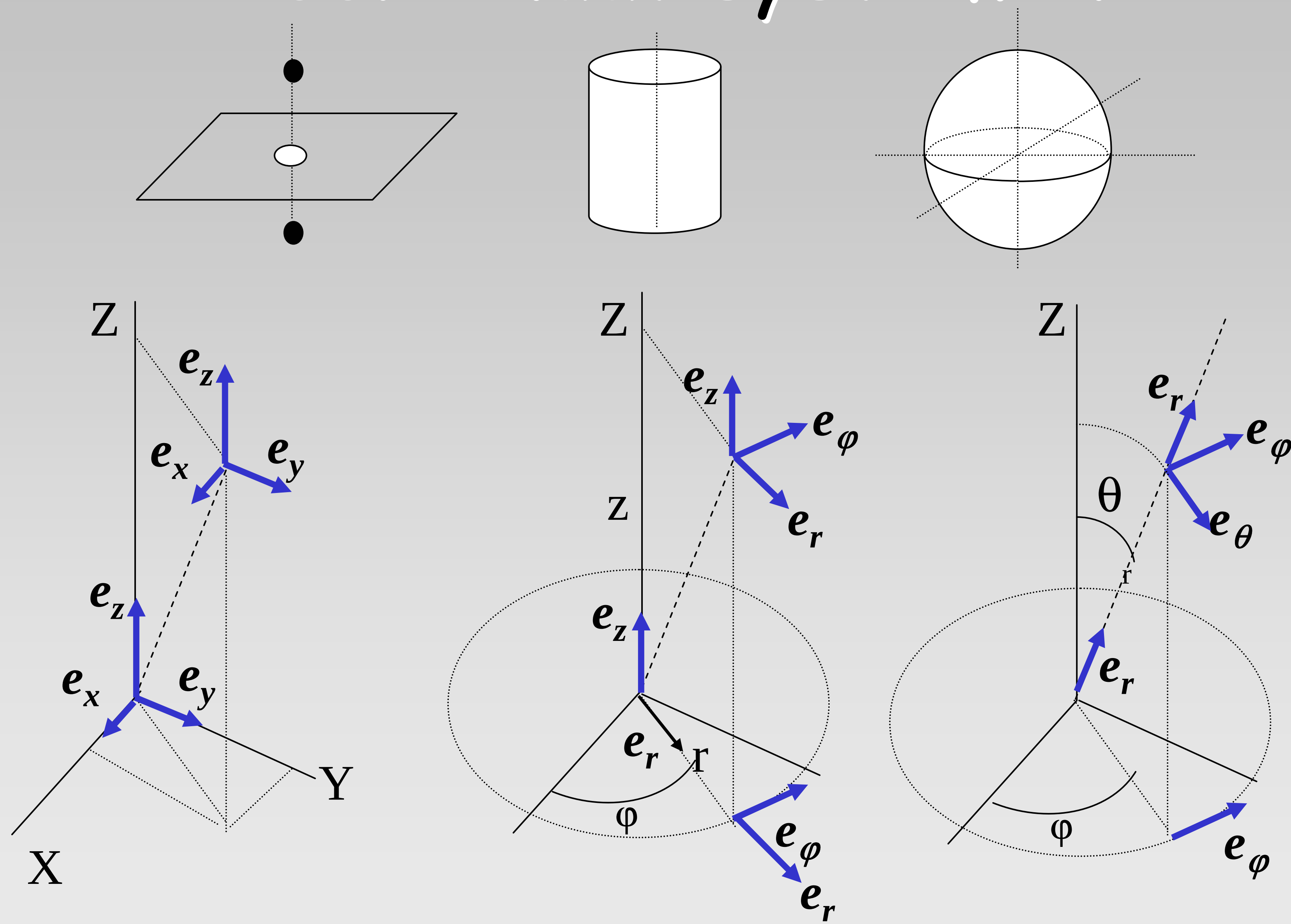
Volume integralen

Coördinaat systemen

Cilinder coördinaten

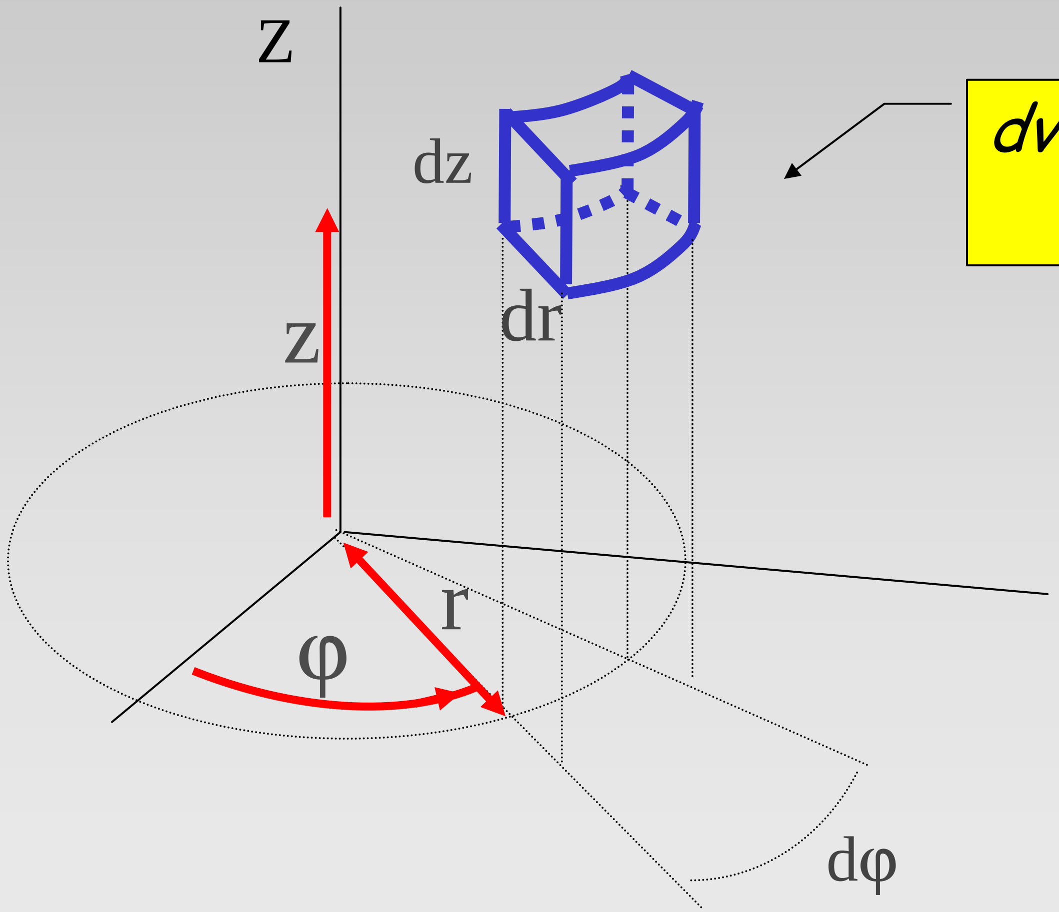
Bol coördinaten

Coördinaat systemen



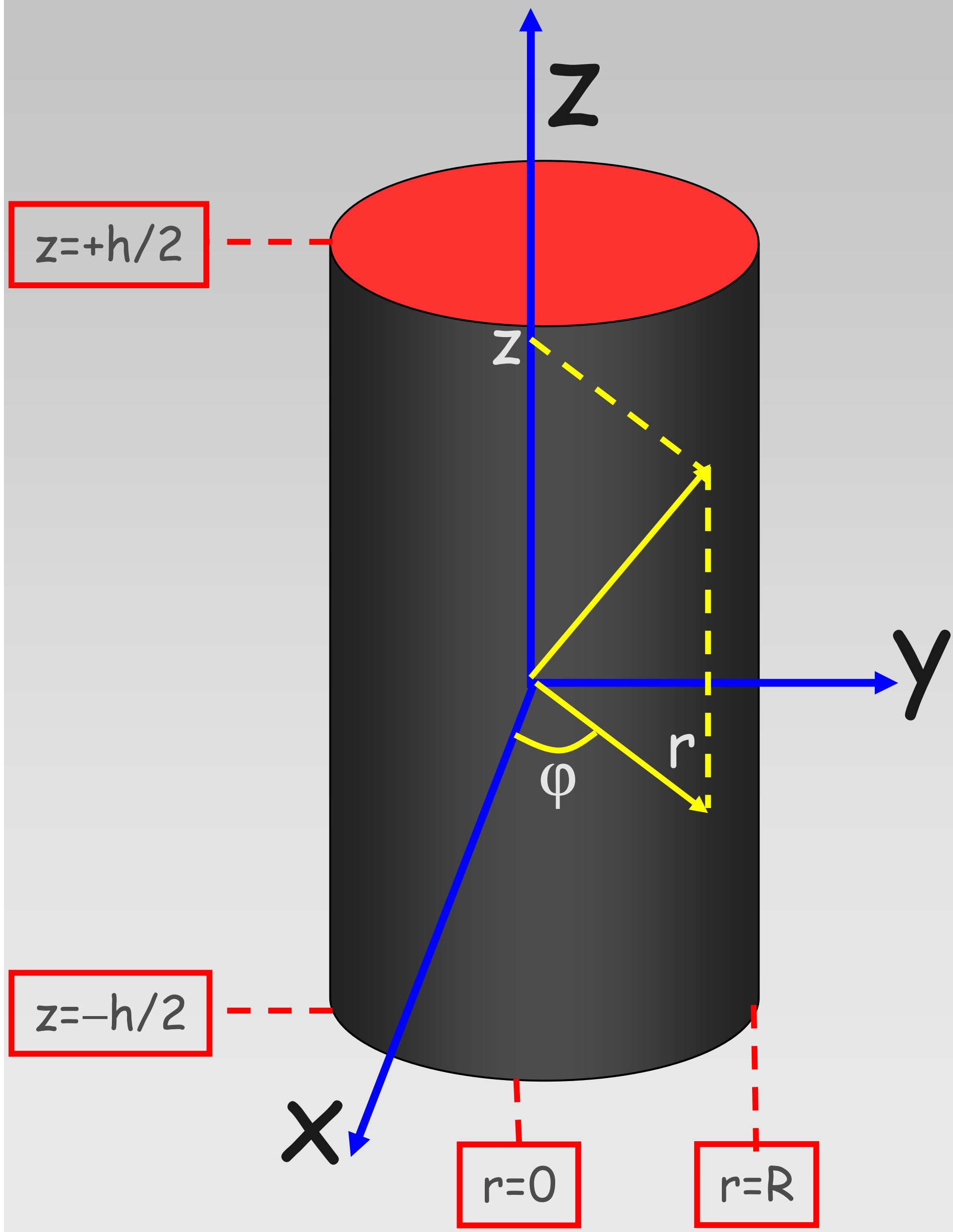
(x,y,z) (r,φ,z) (r,θ,φ)

Volume integraal: cilinder coördinaten



$dv=(dz)\ (rd\varphi)\ dr$
$=r\ dzdrd\ \varphi$

Voorbeeld: cilinder inhoud



Om de cilinder inhoud te bepalen integreer je de functie "1" over het cilinder volume:

Integratie domein:

z:	[–h/2,+h/2]
r:	[0,R]
φ:	[0,2π]

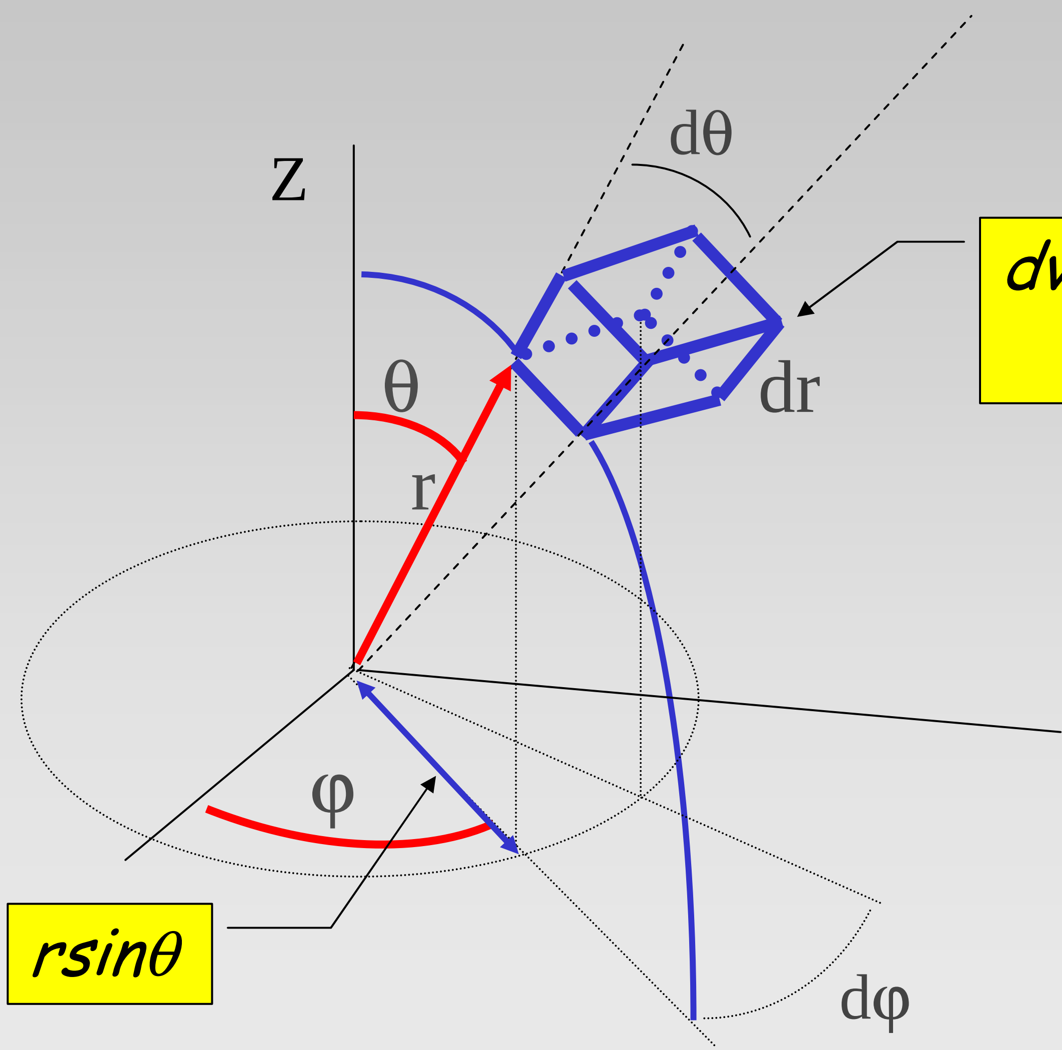
Integraal:

$$\int_{cilinder} 1dV \rightarrow \int_{-h/2}^{+h/2}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} r dr d\varphi dz$$

$$= \int_{-h/2}^{+h/2}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R d\varphi dz$$

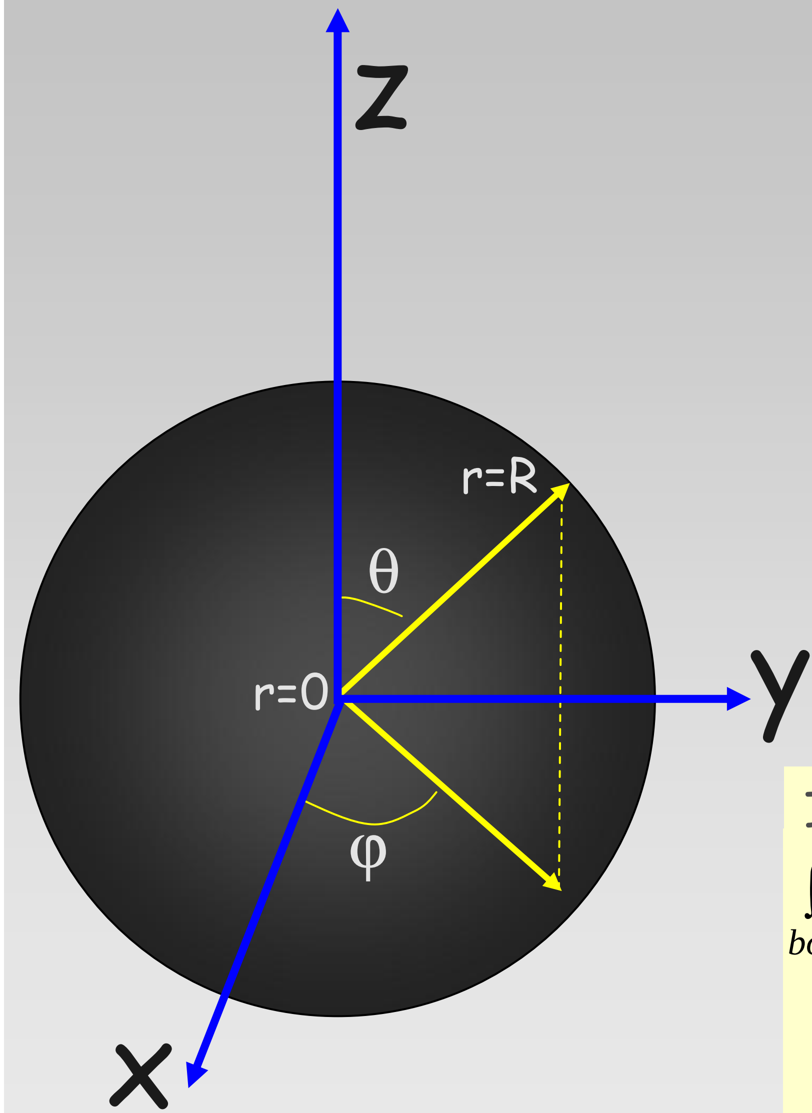
$$= \int_{-h/2}^{+h/2}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\varphi dz = \pi R^2 h$$

Volume integraal: bol coördinaten



$$dv=(rd\theta)\ (r\sin\theta d\varphi)\ (dr)$$
$$=r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi dr$$

Voorbeeld: bol inhoud



Om de bol inhoud te bepalen integreer je de functie “1” over het bol volume:

Integratie domein:

r:	[0,R]
θ:	[0,π]
φ:	[0,2π]

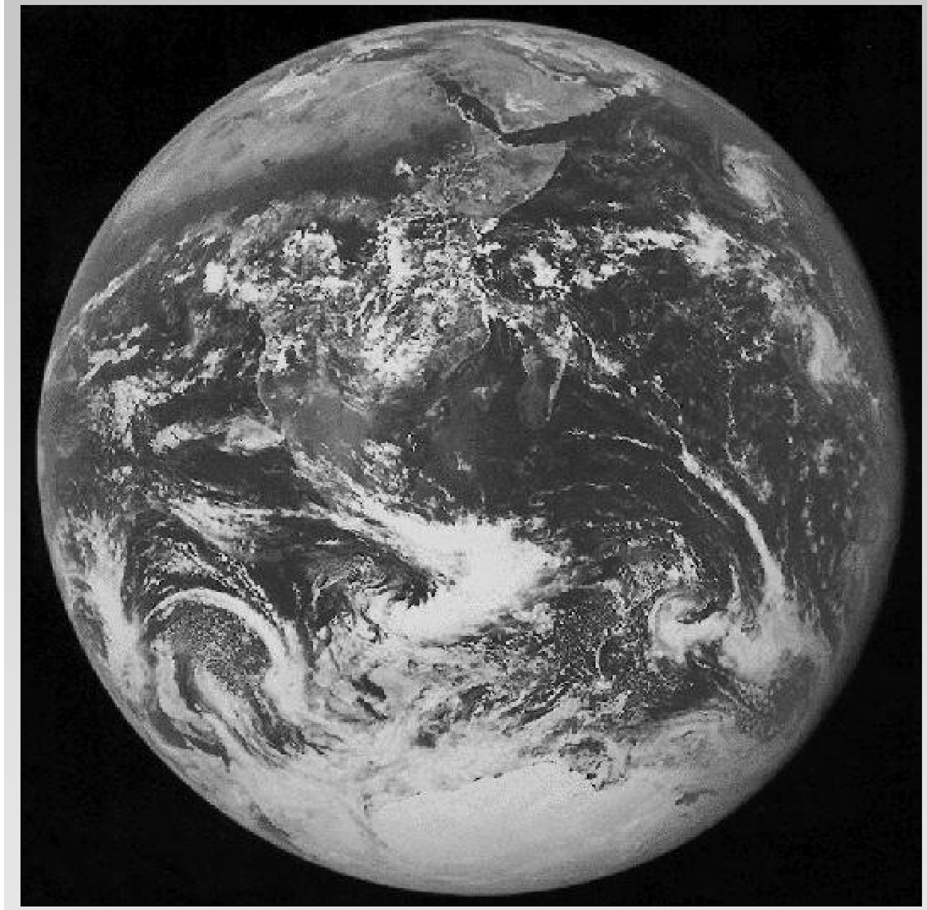
Integraal:

$$\int_{bol} 1 dV \rightarrow \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr$$

$$= \int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin\theta \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) d\theta dr = 2\pi \int_0^R r^2 \left(-\cos\theta \Big|_0^\pi \right) dr$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left(r^3 \Big|_0^R \right) = \frac{4\pi}{3} R^3$$

V.b.: hoeveel m^3 H_2O ongeveer op aarde?



Straal aarde: $\approx 6.400\times10^6$ m
Gemiddelde H_2O laag: $\approx 10^3$ m

$\Rightarrow$ integratie domein:

r: [Ri$\equiv$6.399$\times10^6$ m, Ro$\equiv$6.400$\times10^6$ m]
θ: $[0,\pi]$
φ: $[0,2\pi]$

$$\int_{bolschil} 1dV \rightarrow \int_{Ri}^{Ro}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr$$

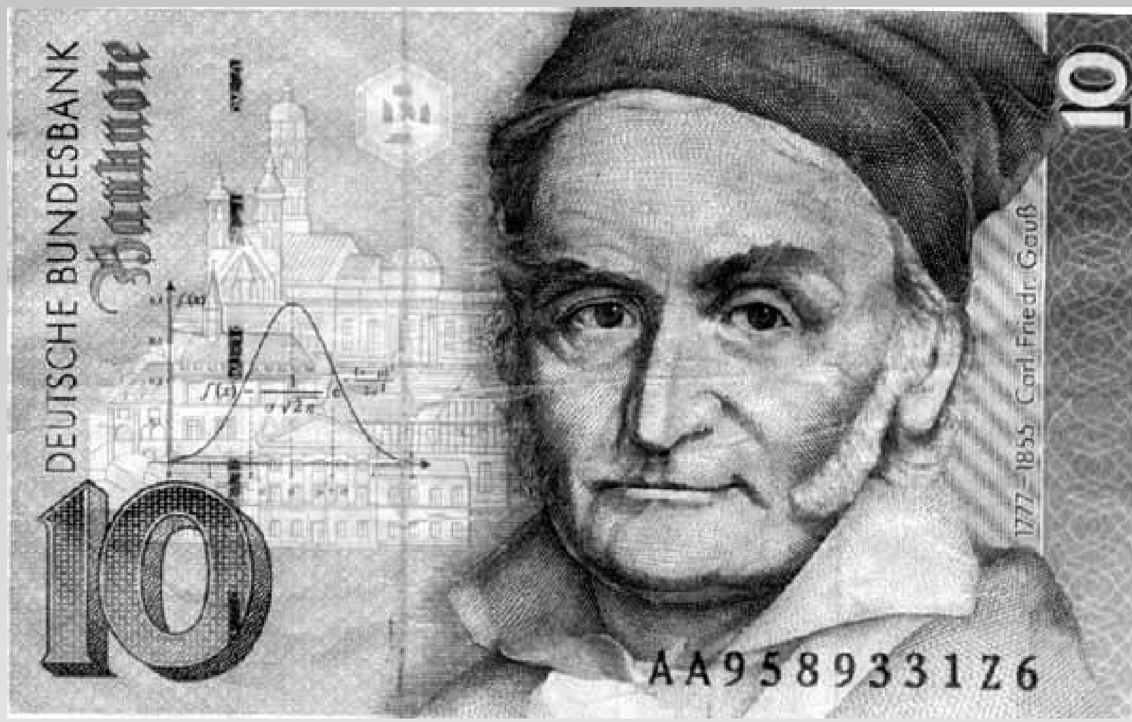
$$= \int_{Ri}^{Ro}\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta \left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) d\theta dr = 2\pi \int_{Ri}^{Ro} r^2 \left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right) dr$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(r^3\Big|_{Ri}^{Ro}\right) = \frac{4\pi}{3}\left(Ro^3 - Ri^3\right) \rightarrow 5.15\times10^{17} m^3$$

Natuurlijk zelfde als volume van een 10^3 m dikke bolschil bij r= 6.400×10^6 m:

$$H_2O \approx 4\pi(6.400\times10^6)^2 \times10^3 \approx 5.15\times10^{17}\ m^3$$

Wet van Gauss

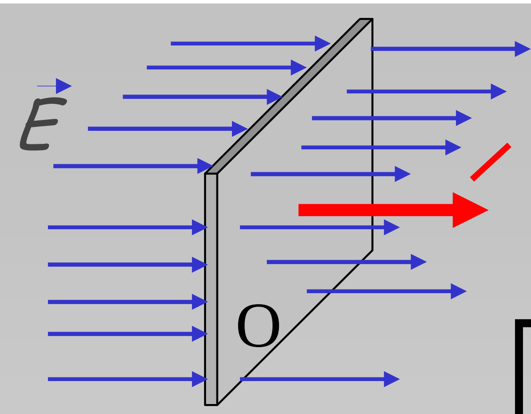


De elektrische flux

De wet van Gauss

Voorbeelden

Flux Φ_E

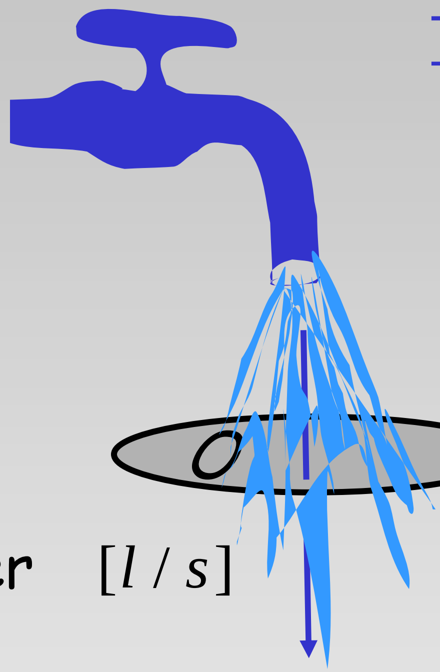


$$d\hat{o} = \hat{e}_n\, do$$

$$\angle(\vec{E}, d\hat{o}) = 0^o$$

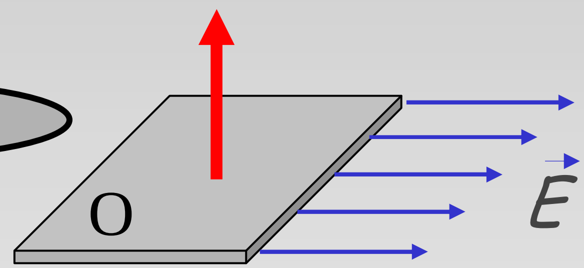
$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_E &\equiv \int_{oppervlak\,O} d\hat{o}\cdot\vec{E} \\ &\equiv \int_{oppervlak\,O} do\,\hat{e}_n\cdot\vec{E} = OE\end{aligned}}$$

Waterkraan:



"Flux" :

$$\int_{oppervlak\ O} do\ \text{water}\quad [l/s]$$

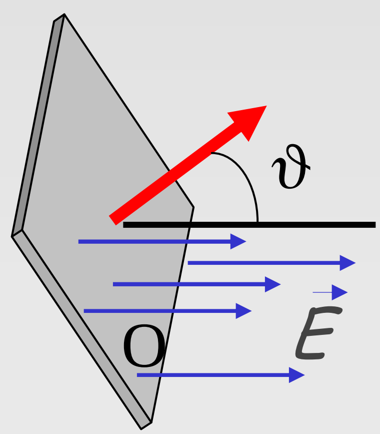


$$\angle(\vec{E}, d\hat{o}) = 90^o$$

$$\boxed{\Phi_E \equiv \int_{oppervlak\,O} d\hat{o}\cdot\vec{E} = 0}$$

Verband tussen:

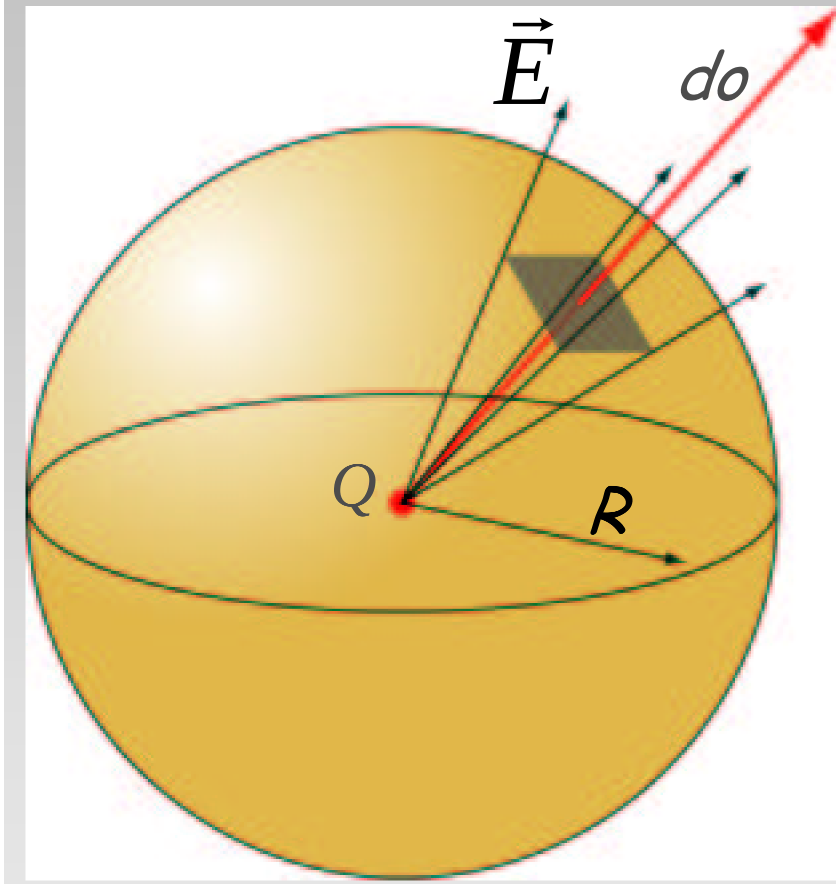
- open/dicht van de kraan
- "flux" door oppervlak O



$$\angle(\vec{E}, d\hat{o}) = \vartheta$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_E &\equiv \int_{oppervlak\,O} do\,\hat{e}_n\cdot\vec{E} \\ &= OE\cos\vartheta\end{aligned}}$$

Gevolg wet van Coulomb



Lading Q in middelpunt bol

Flux Φ_E door boloppervlak wordt:

$$\Phi_E \equiv \oint_{bol} \vec{E}\cdot d\vec{o} = \oint_{bol} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} do \qquad (\vec{E} \,//\, d\vec{o})$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} R^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \qquad (r\theta\varphi)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

De essentie:

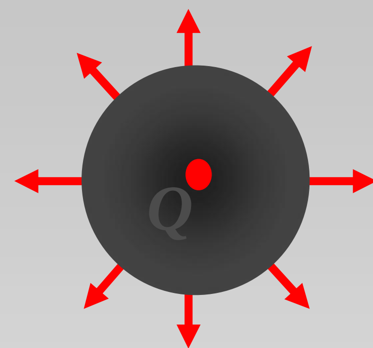
- $E \propto 1/r^2$
- boloppervlak $\propto r^2$

$\Phi_E = Q/\varepsilon_0$ geldt voor ieder omsluitend oppervlak; niet alleen voor bol met Q in middelpunt!

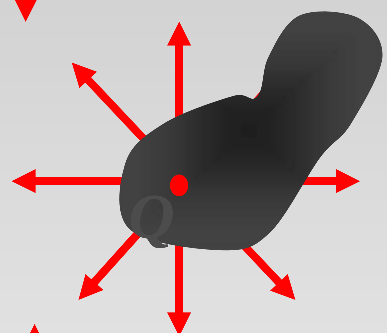
Wet van Gauss:

$$\Phi_E \equiv \oint_{oppervlak\,O} \vec{E}\cdot d\hat{o} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{omsloten} Q_i$$

Lading Q omsloten door een boloppervlak

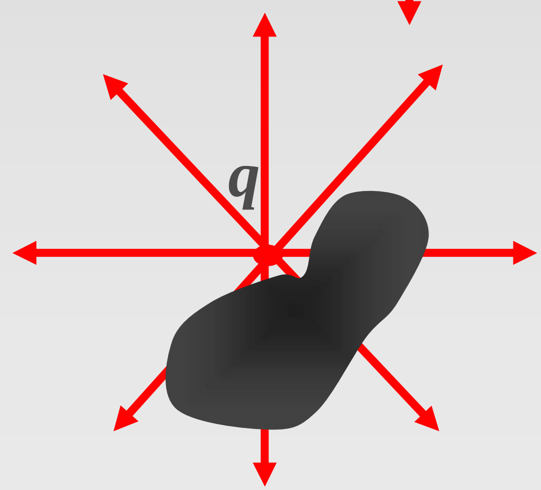


Lading Q omsloten door willekeurig oppervlak



$$\left.\right\} \Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

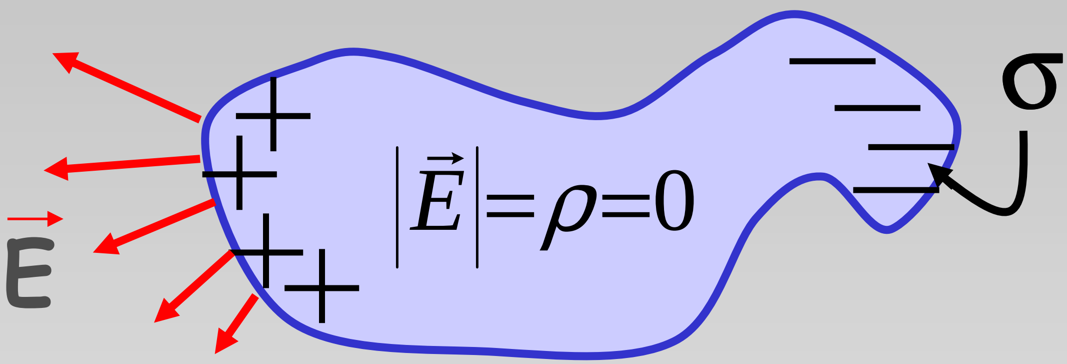
Lading q buiten een willekeurig oppervlak

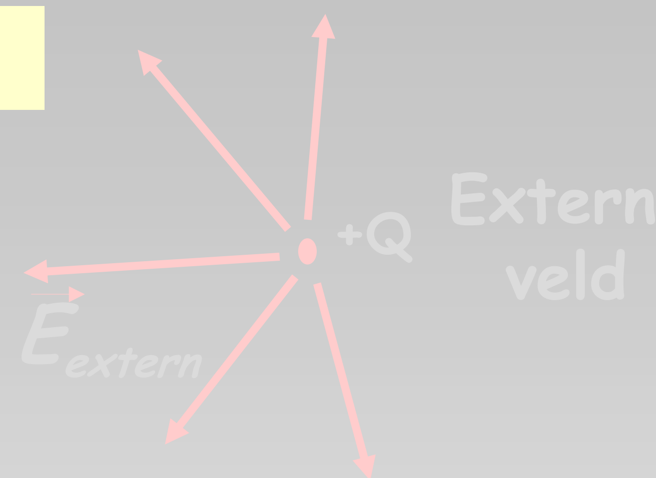


$$\boxed{\Phi_E = 0}$$

Materie: de geleider

Geleider: (∞) veel vrije ladingsdragers!





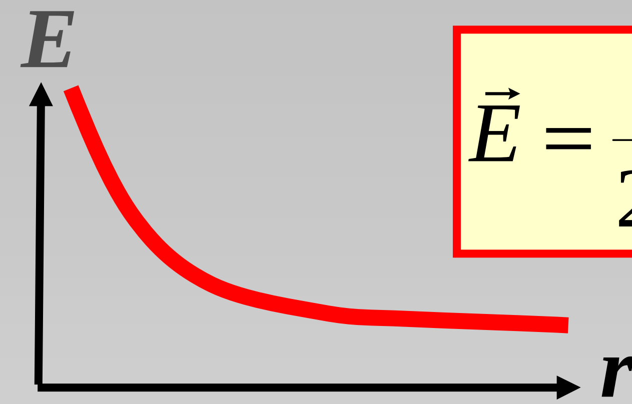
Karakteristieken:

- $\vec{E}=\vec{0}$ in geleider — $\vec{E}\neq\vec{0} \Rightarrow$ lading gaat bewegen!
- lading op de rand — maar anders!
- ρ=0 in geleider — $\rho=\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$
- E ⊥ geleideroppervlak — $\vec{E}_{//}\neq\vec{0} \Rightarrow$ lading gaat bewegen!

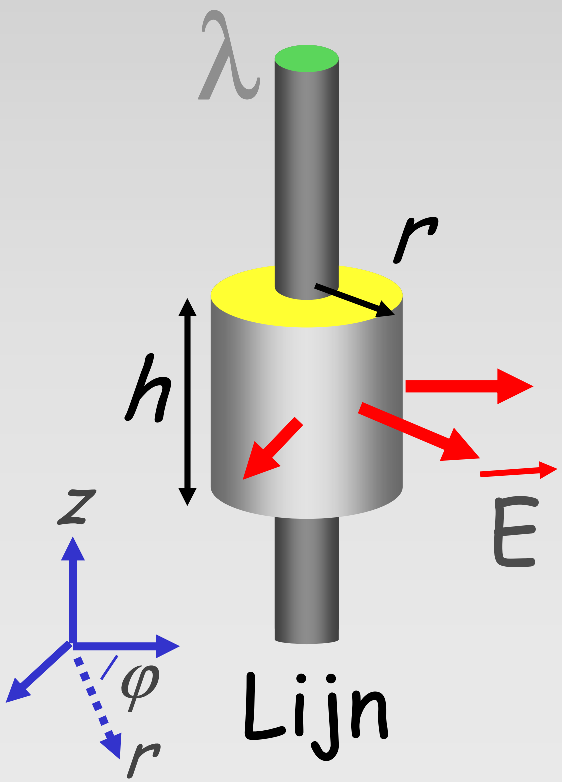
V.b. Gauss: dunne draad

Dunne ∞ draad:

- ladingsverdeling: λ C/m
- **symmetrie: E ⊥ draad, E(r)**
- "Gauss box": cilindertje



$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\hat{r}}{r}}$$



Flux :

deksels cilinder: $\Phi_E = 0$ want : $\vec{E} \perp d\vec{\sigma}$

wand cilinder: $\Phi_E = 2\pi\, r h E$

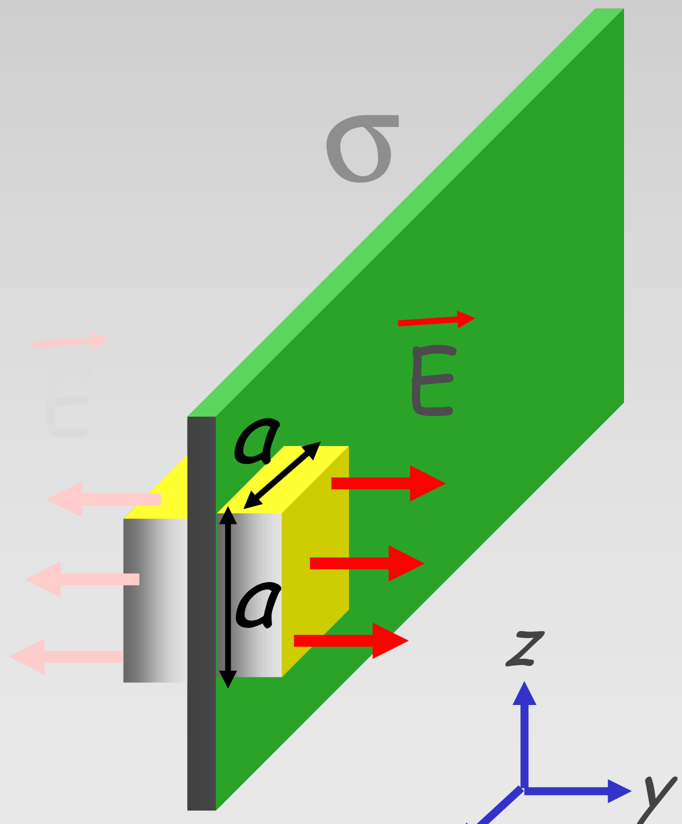
Wet van Gauss :

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum Q_{omsloten} \Rightarrow 2\pi\, r h E \equiv \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\, r \varepsilon_0}$$

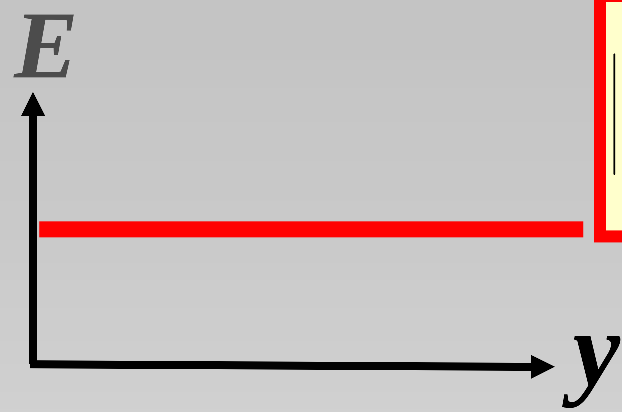
V.b. Gauss: vlakke plaat

Vlakke ∞ plaat:

- ladingsverdeling: σ C/m²
- symmetrie: E ⊥ vlak, E(y)
- "Gauss box": kubusje



Plaat



$$\boxed{\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Flux :

voor/achterkant : $\Phi_E = 0$ want : $\vec{E} \perp d\vec{\sigma}$

boven/onderkant : $\Phi_E = 0$ want : $\vec{E} \perp d\vec{\sigma}$

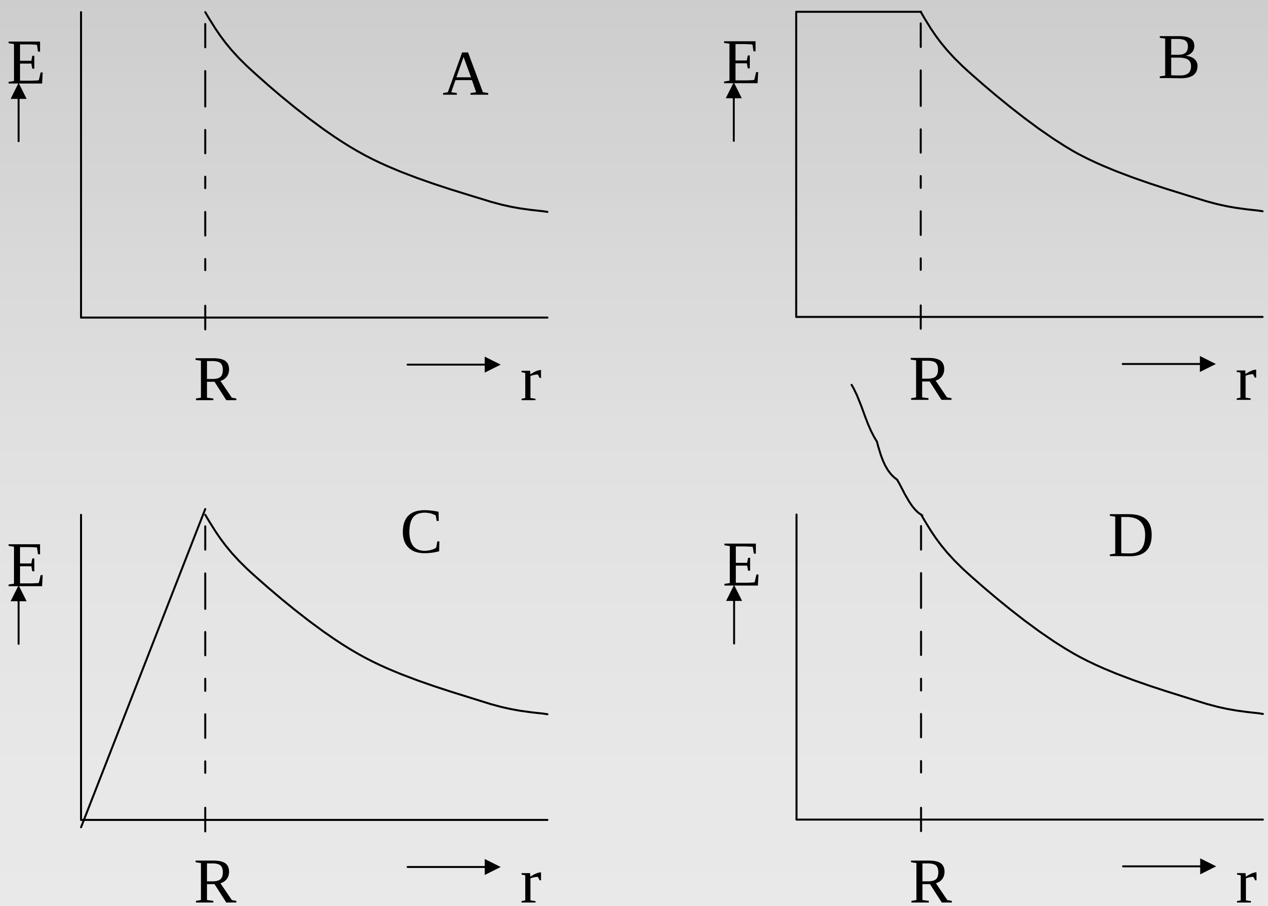
zijkanten : $\Phi_E = a^2 E + a^2 E = 2a^2 E$

Wet van Gauss :

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum Q_{omsloten} \Rightarrow 2a^2 E \equiv \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

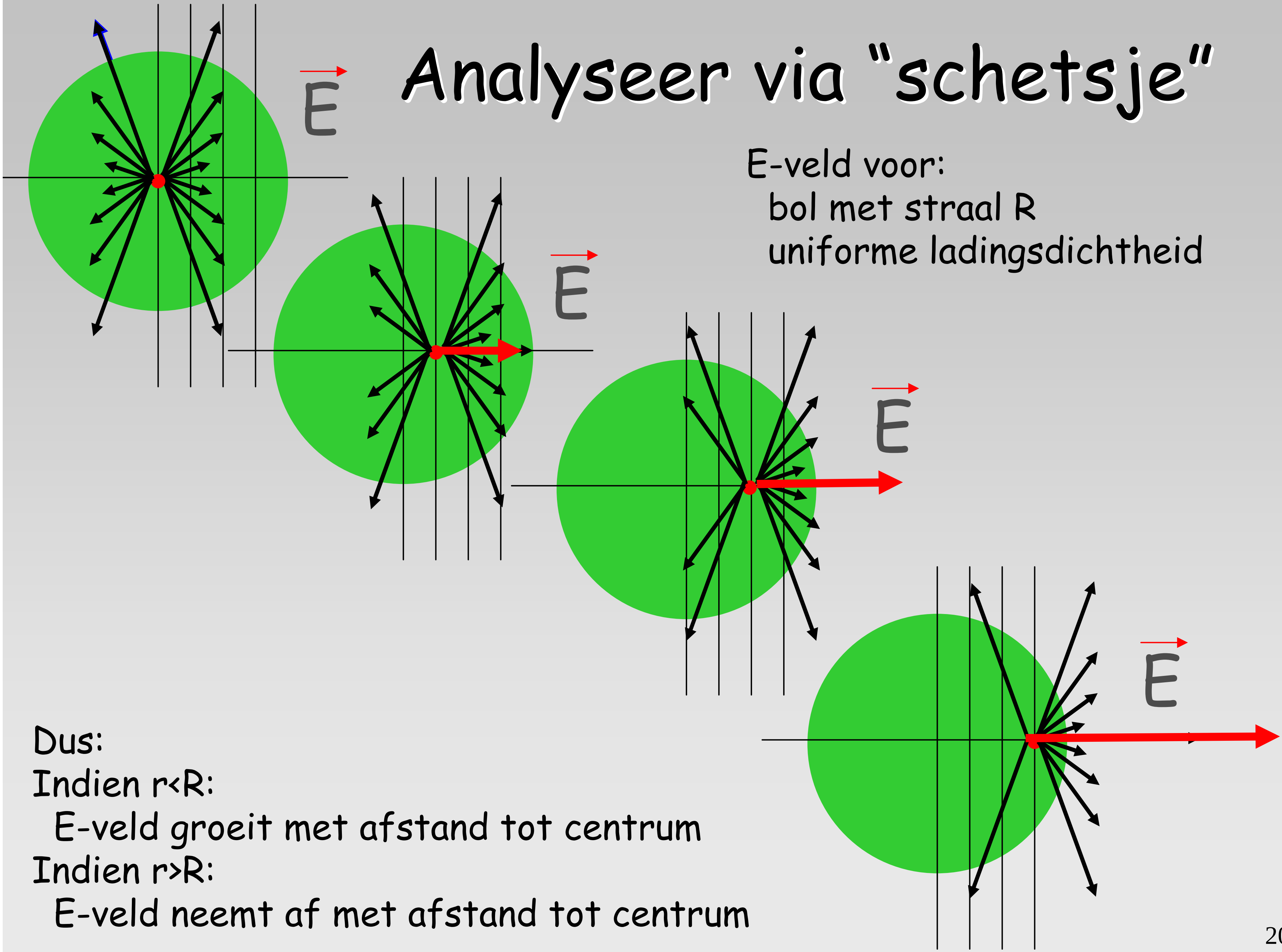
Discussievraag 2

We beschouwen een massieve niet-geleidende bol met uniforme ladingsdichtheid. Welke grafiek geeft het elektrisch veld als functie van de afstand tot het middelpunt van de bol?



Analyseer via "schetsje"

E-veld voor:
  bol met straal R
  uniforme ladingsdichtheid

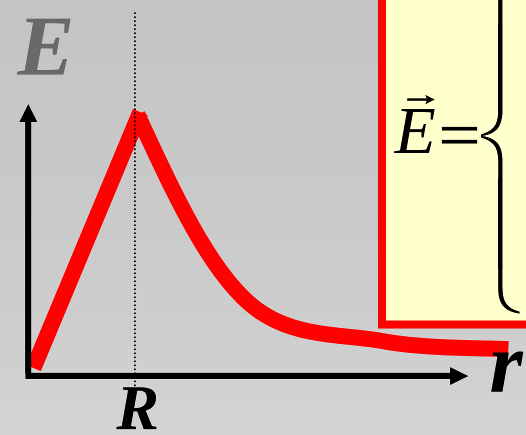


Dus:
Indien r<R:
  E-veld groeit met afstand tot centrum
Indien r>R:
  E-veld neemt af met afstand tot centrum

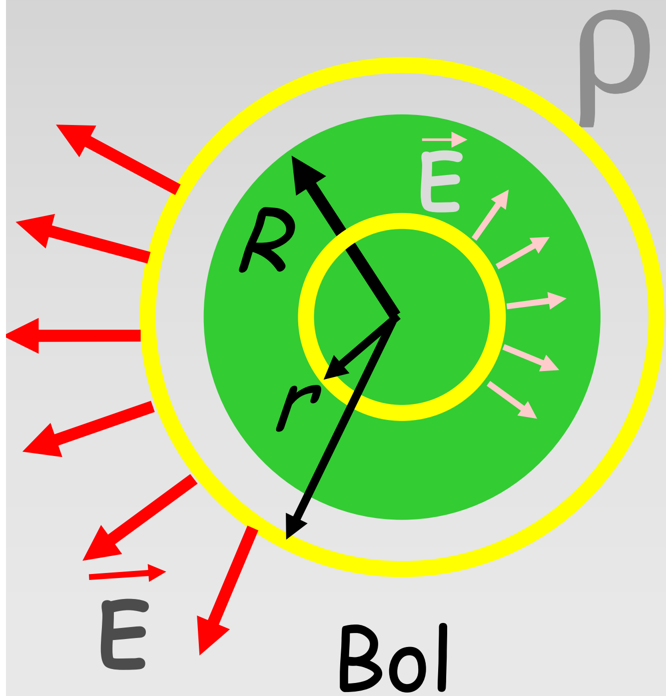
V.b. Gauss: bolvolume

Bolvolume:

- ladingsverdeling: ρ C/m^3
- symmetrie: $E \perp$ bol, $E(r)$
- "Gauss box": bolletje



$$\vec{E} = \begin{cases} r \le R: \ \vec{E} = \dfrac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0} \\ r \ge R: \ \vec{E} = \dfrac{\rho R^3 \hat{r}}{3\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$



Flux : $\Phi_E = 4\pi r^2 E$

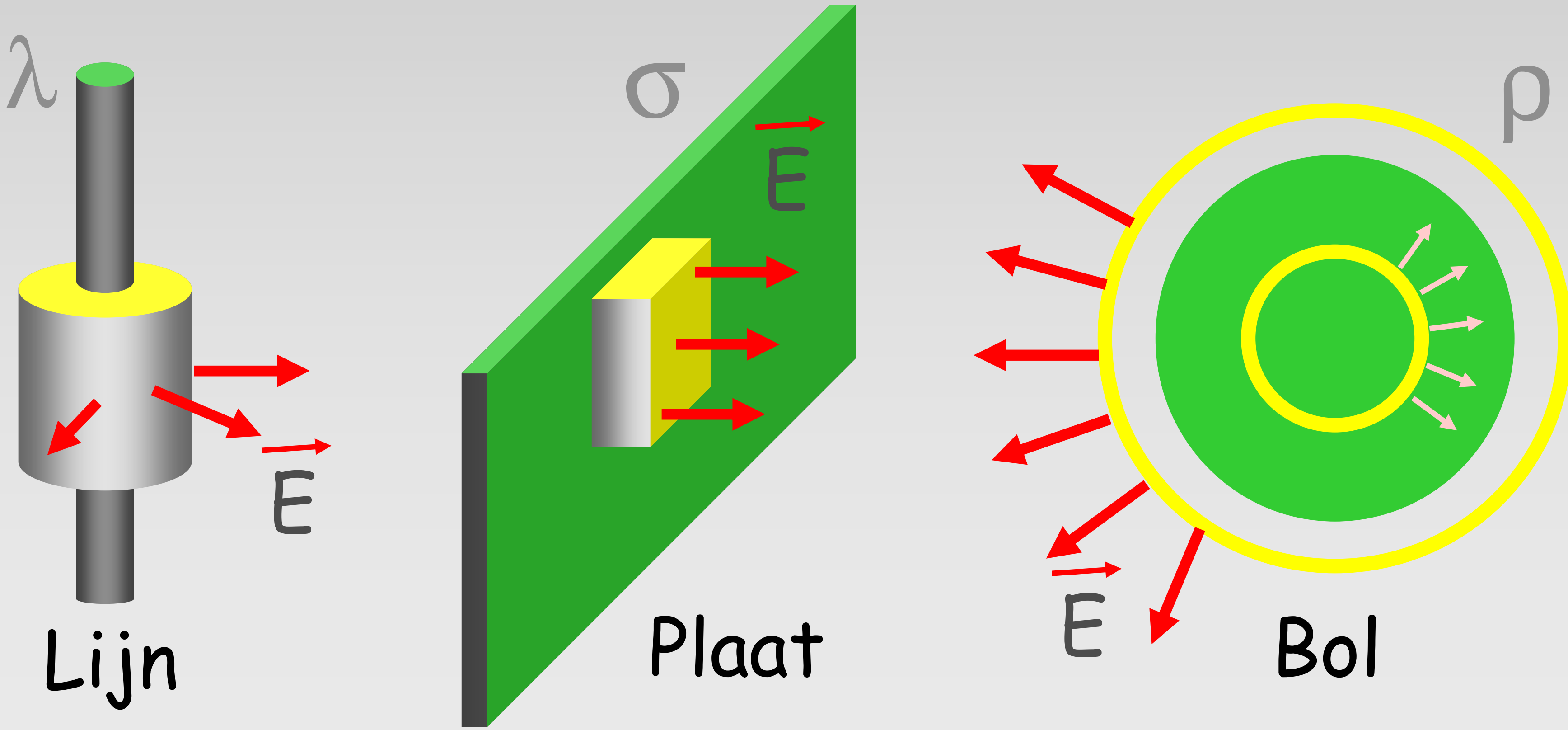
Wet van Gauss :

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum Q_{omsloten} \Rightarrow \begin{cases} r<R: \ 4\pi r^2 E = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} \\ r>R: \ 4\pi r^2 E = \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

Overzicht toepassingen wet van Gauss

Symmetrie voor E-veld <u>de</u> essentie!

$$\Phi_E \equiv \oint_{oppervlak\,O} \vec{E}\cdot d\hat{o} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{omsloten} Q_i$$



II: Wat heb ik geleerd?

Volume integralen: • cartesische, cilinder & bol coördinaten

Veld uit $\rho(\vec{r})$

$$\begin{cases} \text{direkt} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int_{volume} \rho(\vec{r}) \frac{\hat{r}}{r^2} dv \\[2ex] \text{via wet van Gauss} \Rightarrow \displaystyle\oint_{oppervlak} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{volume} \rho(\vec{r}) dv \end{cases}$$