

Joost Hulshof

Vrije Universiteit Amsterdam
 Faculteit der Exacte Wetenschappen, afdeling Wiskunde
 De Boelelaan 1081
 1081 HV Amsterdam
 jhulshof@few.vu.nl

Vakantiecursus

Differentiaalvergelijkingen, oscillaties en planeetbanen

Differentiaalvergelijkingen komen weer terug in het middelbaar onderwijs. Dit is logisch vanwege het enorme toepassingsgebied van dit soort vergelijkingen. Het is verrassend hoeveel kwalitatieve analyse er gedaan kan worden op een differentiaalvergelijking met elementaire, in het vwo onderwezen middelen. Dit vergt wel een zekere cultuuromslag: de basisprincipes van de analyse moeten veel vroeger worden ingevoerd. Hiervoor heb je heel wat idealisme nodig. Joost Hulshof, hoogleraar analyse aan de Vrije Universiteit in Amsterdam in zo'n idealist: in onderstaande tekst afkomstig van de Vakantiecursus 2007 van het CWI leidt hij met elementaire middelen onder andere de planeetwetten van Kepler af uit enkele fundamentele differentiaalvergelijkingen.

Nu differentiaalvergelijkingen terugkeren in de havo- en vwo-wiskunde is er alle reden om daar in de vakantiecursus aandacht aan te besteden. Differentiaalvergelijkingen beschrijven hoe toestanden van allerhande systemen in tijd of plaats veranderen. Een hangende kabel, een trillend membraan, stromingen in de lucht, een groeiende celwand, reagerende chemische stoffen, het zonnestelsel, etc. In alle exacte wetenschappen komen differentiaalvergelijkingen voor als wiskundige modellen van wat we zien in de wereld om ons heen, op kleine en op grote schaal.

De onbekende in een differentiaalvergelijking is niet een getal maar een functie. Een functie van de plaats, van de tijd, of van allebei. Ik beperk mij in dit verhaal tot differentiaalvergelijkingen waarin de onbekende een functie is van de tijd, van één reële variabele dus, die ik bij voorkeur t noem. Een triviaal voorbeeld van zo'n differentiaalvergelijking (DV) is

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = 0.$$

De onbekende functie is $x = x(t)$. Net als de meeste differentiaal-

vergelijkers gebruik ik de letter x hier op twee manieren: als afhankelijke variabele maar ook als functie. Wiskundig netter is een notatie $x = f(t)$ als vergelijking voor de grafiek van de functie f in het t, x -vlak, maar dat doet bijna niemand in dit deelgebied van de wiskunde.

De DV $x'(t) = 0$ zegt dat de onbekende functie $x = x(t)$ differentieerbaar moet zijn met afgeleide functie $x'(t)$ gelijk aan nul. De oplossingen van deze DV worden gegeven door

$$x(t) = C,$$

waarin C een willekeurige constante is. De DV heeft dus oneindig veel oplossingen. Om één oplossing te selecteren is een *beginconditie* nodig. Dat is een conditie die zegt wat de waarde van $x(t)$ is op een *begintijdstip*, bijvoorbeeld de beginconditie

$$x(0) = 1.$$

De vergelijking $x'(t) = 0$ met beginconditie $x(0) = 1$ heeft precies één oplossing, namelijk de oplossing $x(t) = 1$. Die oplossing is gedefinieerd voor alle t , dus zowel voor $t > 0$ als voor $t < 0$. De term beginconditie is strikt genomen wat misleidend: we beginnen op $t = 0$ maar we gaan zowel voor- als achteruit in de tijd. Achter de op het oog triviale conclusie dat het *beginwaardeprobleem* $x'(t) = 0$, $x(0) = 1$ precies één oplossing heeft, zit een wiskundige stelling, die in het eerste jaar van een studie wiskunde bij het vak Analyse bewezen wordt.

Stelling. Een differentieerbare functie, waarvan de afgeleide op een interval bestaat en gelijk is aan nul, is een constante functie op dat interval.

Het volgende voorbeeld is fundamenteel,

$$x'(t) = x(t),$$

de DV voor exponentiële groei. Ook deze DV heeft precies één oplossing die voldoet aan de beginconditie $x(0) = 1$, namelijk de functie

$$x(t) = \exp(t) = e^t.$$

Bij dit voorbeeld hebben we een 'kip/ei' situatie. Wat is er eerst, het *beginwaardeprobleem*

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t); \\ x(0) &= 1, \end{aligned}$$

of de functie $\exp(t)$ en het getal $e = \exp(1)$?

Een elegante manier om de functie \exp in te voeren is als de unieke oplossing van dit beginwaardeprobleem. Daarna kunnen we laten zien dat de functie \exp de multiplicatieve eigenschap heeft: voor alle reële t en s geldt

$$\exp(t+s) = \exp(t)\exp(s).$$

Als t van min naar plus oneindig (∞) loopt, dan loopt $\exp(t)$ (monotoon) van nul naar $+\infty$. Per definitie is $e = \exp(1)$. Eenvoudig na te gaan is dat $e^t = \exp(t)$ voor alle rationale t . Voor de details verwijs ik naar [1]. Hier wil ik benadrukken dat we twee ingrediënten nodig hebben voor het bewijs van de multiplicatieve eigenschap.

Globale existentie en uniciteit: *Het beginwaardeprobleem*

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t); \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

heeft voor elke reële t_0 en x_0 een unieke oplossing $x(t)$ die voor alle reële t gedefinieerd is.

Schuiven en schalen: Als we de grafiek van een oplossing van $x'(t) = x(t)$ horizontaal schuiven of vertikaal schalen, krijgen we weer de grafiek van een oplossing.

Het eerste ingrediënt is een *existentie-uniciteit stelling* die veel algemener geldt. Het tweede ingrediënt formuleert twee *invarianties* (ook wel *symmetrie-eigenschappen*) van de vergelijking: omdat t niet apart in de DV voorkomt maakt het niet uit waar we op de t -as de nul kiezen (en dus kunnen we in een bewijs volstaan met $t_0 = 0$). Als we de grafiek van een oplossing in de t -richting heen en weer schuiven, dan krijgen we weer de grafiek van een oplossing. Dit heet *translatie-invariantie*, zie Figuur 1, links. Veel specifieker voor de DV $x'(t) = x(t)$ is dat grafieken van oplossingen vertikaal (in de x -richting) geschaald mogen worden. Als we x schalen dan komt de schaalfactor in alle termen van de DV naar voren en kan weggestreept worden. Evenzo is gemakkelijk na te gaan dat de som van twee oplossingen weer een oplossing is. De differentiaalvergelijking $x'(t) = x(t)$ heet daarom *lineair*. In het bijzonder zien we dat (met schaalfactor -1) de grafiek van een oplossing van een *lineaire* DV na *spiegeling* in de t -as

weer een grafiek van een oplossing is.

Met deze ingrediënten kunnen we de belangrijkste eigenschappen van oplossingen afleiden zonder de DV op te lossen. Na de invoering van de functie \exp wordt de unieke oplossing van $x'(t) = x(t)$ met beginvoorwaarde $x(t_0) = x_0$ gegeven door

$$x(t) = x_0 \exp(t - t_0) = x_0 e^{t-t_0},$$

de exponentiële functie waar we mee begonnen zijn, geschaald met een factor $x(t_0)$ en verschoven over t_0 .

Als we eenmaal de functie $e^t = \exp(t)$ tot onze beschikking hebben, ingevoerd als oplossing van een beginwaardeprobleem of op een andere manier waaruit volgt dat $e^0 = 1$ en de afgeleide van e^t bestaat en gelijk is aan e^t zelf, dan kunnen we in principe alle DV's aan die van de vorm

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

zijn, met $a(t)$ en $b(t)$ continue functies op een gegeven interval. Dit is de algemene *eerste orde lineaire inhomogene differentiaalvergelijking*. Lineair vanwege de lineaire vorm waarin x en x' voorkomen, inhomogeen vanwege de term $b(t)$. Zonder $b(t)$ heet de vergelijking *homogeen*.

We gebruiken hiertoe de volgende wiskundige stelling.

Primitieve functies: Als $a(t)$ continu is op een interval, dan heeft $a(t)$ op dat interval een primitieve functie $A(t)$, i.e. de functie $A(t)$ is op dat interval differentieerbaar en $A'(t) = a(t)$.

Voor een oplossing $x(t)$ van de lineaire inhomogene eerste orde DV geldt de volgende keten van equivalente DV's:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \iff x'(t) - a(t)x(t) = b(t)$$

(vermenigvuldig met de positieve (!) 'integrerende' factor $e^{-A(t)}$)

$$\iff e^{-A(t)} (x'(t) - a(t)x(t)) = e^{-A(t)} b(t)$$

(gebruik de kettingregel en de produktregel)

$$\iff \left(e^{-A(t)} x(t) \right)' = e^{-A(t)} b(t)$$

Laat nu $F(t)$ een primitieve zijn van de functie aan de rechterkant van de laatste vergelijking. Dan volgt

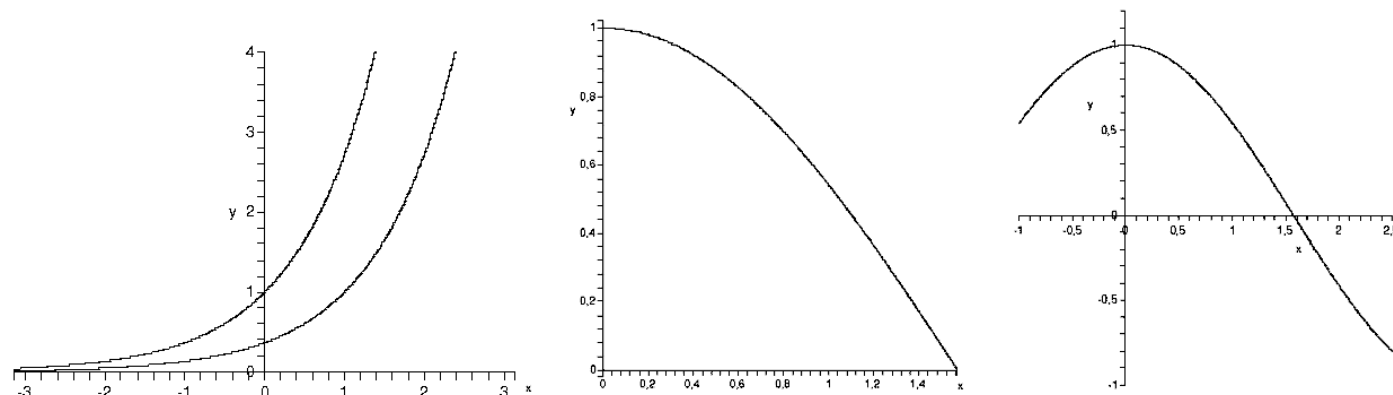
$$e^{-A(t)} x(t) - F(t) = C,$$

met C een (nog onbekende) constante. De afgeleide van het linkerlid is immers nul. Omschrijven geeft als algemene oplossing

$$x(t) = e^{A(t)} (C + F(t)),$$

waarin de keuze

$$C = e^{-A(t_0)} x_0 - F(t_0)$$



Figuur 1 Links: een oplossing en een verschoven oplossing; midden: de grafiek van de oplossing $X(t)$ begint horizontaal in $(t, x) = (0, 1)$ en loopt daarna met toenemende steilheid naar beneden tot het snijpunt met de t -as in $(t, x) = (T, 0)$; rechts: symmetrie in x -as, puntsymmetrie in $(x, t) = (T, 0)$, periode $4T$.

nodig en voldoende is om aan de beginwaarde $x(t_0) = x_0$ te voldoen, hetgeen dan geeft

$$x(t) = x_0 e^{A(t)-A(t_0)} + e^{A(t)} (F(t) - F(t_0)).$$

Met $a(t) = 1$ en $b(t) = 0$ reduceert dit tot de oplossing van $x'(t) = x(t)$ met $x(t_0) = x_0$ die we al hadden.

De afleiding hierboven geldt voor elke oplossing. In het bijzonder is existentie en uniciteit voor het beginwaardeprobleem teruggebracht tot de eerdergenoemde stelling over functies met afgeleide nul en het bestaan van een exponentiële functie.

De functie \exp wordt transcendent genoemd omdat we $\exp(t)$ niet met alleen maar algebraïsche manipulaties uit t kunnen destilleren. Hieronder behandel ik de nauw met \exp verbonden transcendenten functies \cos en \sin als oplossingen van de tweede orde DV $x''(t) = -x(t)$, de eenvoudigste DV die periodieke verschijnselen beschrijft.

Newton heeft de differentiaalrekening ontwikkeld om de door Kepler empirisch bepaalde wetten voor elliptische planeetbanen te verklaren. Die verklaring komt verderop aan de orde als ik de bewegingsvergelijkingen voor een deeltje in een centraal krachtveld behandel. Maar daarvoor sta ik eerst nog even stil bij de vraag naar het bestaan van oplossingen in het algemeen.

In het algemeen zijn DV's bijna nooit exact oplosbaar, maar zijn er wel stellingen die zeggen dat oplossingen bestaan. Eigenschappen van oplossingen moeten dan uit de DV zelf worden afgeleid. Ook als er wel een exacte oplossing bestaat is het vaak inzichtelijker om de eigenschappen van die oplossing uit de DV zelf en niet uit de oplossingsformule te halen.

Oscillaties en cirkels

In de inleiding is de functie \exp geïntroduceerd als oplossing van een beginwaardeprobleem. Op dezelfde manier kunnen de functies \cos en \sin worden geïntroduceerd.

De slingervergelijking

De tweede orde DV

$$x''(t) = -x(t)$$

staat bekend als de *lineaire slingervergelijking* zonder wrijving. Voor elke t moet de tweede afgeleide $x''(t)$ bestaan en gelijk zijn aan $-x(t)$. Zien we $x(t)$ als de positie van een op een lijn bewe-

gend punt, dan is $x'(t)$ de *snelheid* van dit punt en $x''(t)$ de *versnelling*. In de mechanica van Newton is de versnelling van een puntmassa gelijk aan het quotient van de kracht F die op de puntmassa werkt en de massa m van het punt. De slingervergelijking beschrijft dus de beweging van een puntmassa met massa 1 in een *krachtveld* gegeven door $F = -x$. Het krachtveld trekt de puntmassa terug naar het *evenwicht* $x = 0$, als gevolg waarvan $x(t)$ heen en weer slingert om $x = 0$. Daarbij is er een *behouden grootte* want voor elke oplossing geldt

$$\left((x'(t))^2 + (x(t))^2 \right)' = 2x'(t)x''(t) + 2x(t)x'(t) = 0,$$

en dus is

$$(x'(t))^2 + (x(t))^2 = C,$$

waarin $C \geq 0$ een constante is die van de beginvoorwaarden afhangt. Deze behouden grootte correspondeert met de wet van behoud van energie (de som van kinetische en potentiële energie) in conservatieve krachtvelden.

Globale existentie en uniciteit: Voor elke reële t_0, x_0, x_1 heeft het beginwaardeprobleem

$$x''(t) = -x(t);$$

$$x(t_0) = x_0,$$

$$x'(t_0) = x_1,$$

een unieke oplossing $x(t)$ die gedefinieerd is voor alle reële t .

Omdat de vergelijking lineair is en een nogal bijzondere (som van kwadraten) behouden grootte heeft, is uniciteit makkelijk in te zien: als we twee oplossingen hebben van het beginwaardeprobleem, dan is het verschil een oplossing met beginwaarde $x(t_0) = x'(t_0) = 0$, en heeft dus constante $C = 0$ voor zijn behouden grootte. Beide kwadraten in de behouden grootte zijn dus nul en de verschiloplossing kan alleen maar de nulfunctie zijn.

Een tweede orde DV heeft dus twee beginwaarden nodig om de oplossing uniek te bepalen: in mechanische termen een beginpositie en een beginsnelheid, in wiskundige termen, een beginwaarde voor de oplossing en een beginwaarde voor de afgeleide.

De oplossing met $x(0) = 1$ en $x'(0) = 0$ (in de stelling $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$) noem ik $X(t)$. Wat kunnen we over deze oplossing zeggen?

1. $X(t)$ heeft een maximum in $t = 0$ omdat $X''(0) = -X(0) = -1 < 0$. Laten we t vanaf $t = 0$ groter worden, dan is $X''(t) = -X(t) < 0$ en wordt daarmee $X'(t)$ negatiever zo lang $X(t)$ positief is. We concluderen dat $X(t)$ niet positief kan blijven. Het eerste positieve nulpunt van $X(t)$ noem ik T . Dus $X(T) = 0$ en $X'(t) < 0$ voor $0 < t \leq T$. Zie Figuur 1, midden.
2. De DV $x''(t) = -x(t)$ heeft nog een invariantie. Behalve dat t niet apart voorkomt, komt ook de eerste afgeleide $x'(t)$ niet voor in de DV. De DV bevat alleen afgeleiden van *even orde*. Hierdoor geeft spiegeling in de x -as van de grafiek van een oplossing weer de grafiek van een oplossing. In het bijzonder is de grafiek van de oplossing $X(t)$ na spiegeling in de x -as weer de grafiek van een oplossing met $x(0) = 1$ en $x'(0) = 0$. Vanwege de uniciteit stelling vallen de grafiek en zijn gespiegelde samen. De grafiek van $X(t)$ is dus symmetrisch in de x -as: $X(t) = X(-t)$, zie Figuur 1, rechts.
3. Net als bij de DV $x'(t) = x(t)$ kunnen we oplossingen van DV $x''(t) = x(t)$ schuiven en verticaal schalen. Combineren we schuiven met spiegelen in de x -as, dan zien we dat we mogen spiegelen in elke verticale lijn. Dus ook in de lijn $t = T$. Combinatie van spiegeling in de lijn $t = T$ met spiegeling in de t -as geeft een *puntspiegeling* in het punt $(t, x) = (0, T)$. Omdat $X(T) = 0$ is ook de puntgespiegelde grafiek de grafiek van een oplossing die nul is in $t = T$, met (kijk naar de raaklijn) *dezelfde afgeleide* in $t = T$. Vanwege de uniciteit stelling vallen de grafiek van $X(t)$ en zijn puntgespiegelde samen en is de grafiek van $X(t)$ puntsymmetrisch in $(t, x) = (0, T)$, zie Figuur 1, rechts.
4. Herhaling van de argumenten hierboven geeft voor de grafiek van $X(t)$ *symmetrielijnen* $t = 0$, $t = 2T$, $t = -2T$, $t = 4T$, $t = -4T$, ..., en *symmetriepunten* $(x, t) = (0, -T)$, $(x, t) = (0, 3T)$, $(0, -3T)$, $(0, 5T)$, ... Daarmee wordt de oplossing $X(t)$ *periodiek* met periode $4T$. De oplossing $X(t)$ heeft nulpunten in $t = \pm T$, $t = \pm 3T$, $t = \pm 5T$, ..., maxima in $t = 0$, $t = \pm 4T$, $t = \pm 8T$, ..., minima in $t = \pm 2T$, $t = \pm 6T$, ...

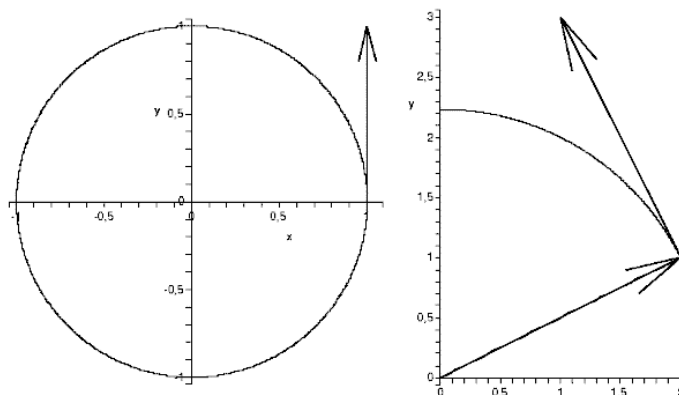
Het fasevlak

Van de tweede orde DV $x''(t) = -x(t)$ kunnen we een eerste orde stelsel maken door de afgeleide van de onbekende functie een nieuwe naam te geven, bijvoorbeeld $y(t) = -x'(t)$. De 'min' hier is niet helemaal gebruikelijk, en is erbij gezet vanwege het specifieke voorbeeld en het verband met de goniometrische functies. De tweede orde DV $x''(t) = -x(t)$ wordt nu $y'(t) = -x''(t) = x(t)$ en is equivalent met een stelsel van twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor $x(t)$ en $y(t)$:

$$\begin{aligned}x' &= -y; \\ y' &= x.\end{aligned}$$

Ik laat vanaf nu in de notatie vaak de expliciete t -afhankelijkheid weg.

Oplossingen $(x(t), y(t))$ kunnen we zien als geparametriseerde krommen in het x, y -vlak, in deze context vaak het *fasevlak* genoemd. Anders gezegd, oplossingen zien we als bewegende punten in het vlak. Een beginpositie (twee beginwaarden) is nodig (en



Figuur 2 Links: $X(t) = \cos t$, $Y(t) = \sin t$, parametrisatie van de cirkel; rechts: positievector, snelheidsvector, oplossingskromme

voldoende) om de oplossing uniek te bepalen.

Globale existentie-uniciteit: Voor elke reële t_0 , x_0 , y_0 heeft het stelsel

$$\begin{aligned}x' &= -y; \\ y' &= x\end{aligned}$$

een unieke en voor alle reële t gedefinieerde oplossing $(x(t), y(t))$ met $x(t_0) = x_0$ en $y(t_0) = y_0$.

Primitieve functies: Als $a(t)$ continu is op een interval dan heeft $a(t)$ op dat interval een primitieve functie $A(t)$, i.e. de functie $A(t)$ is op dat interval differentieerbaar en $A'(t) = a(t)$.

De vector

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$$

is de snelheidsvector van het bewegende punt $(x(t), y(t))$. Bij dit stelsel wordt de snelheidsvector verkregen door de positievector

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

tegen de klok in over 90 graden te draaien, zie Figuur 2, rechts. De behouden grootte zien we nu uit

$$\frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$

$$-2x(t)y(t) + 2y(t)x(t) = 0.$$

Oplossingen bewegen dus over cirkels. De oplossing $x = X(t)$ van de slinger vergelijking $x'' = -x$ met begincondities $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ geeft zo, met $Y(t) = -X'(t)$, een parametrisatie

$$x = X(t), y = Y(t)$$

van de cirkel

$$x^2 + y^2 = 1.$$

De snelheidsvector heeft constante lengte 1. Het punt $(X(t), Y(t))$ begint op $t = 0$ in $(x, y) = (1, 0)$ en loopt de cirkel precies één keer linksom rond als t van $t = 0$ naar $t = 4T$ loopt. Kortom,

$$X(t) = \cos t, \quad Y(t) = \sin t, \quad 4T = 2\pi,$$

zie Figuur 2, links.

De 'multiplicatieve' eigenschap, complexe e -machten

De functies $X(t) = \cos t$ en $Y(t) = \sin t$ voldoen allebei aan de tweede orde DV $x'' = -x$. Begincondities zijn

$$X(0) = 1, \quad X'(0) = 0$$

voor $X(t)$ en

$$Y(0) = -X'(0) = 0, \quad Y'(0) = -X''(0) = X(0) = 1$$

voor $Y(t)$. Omdat de vergelijking $x'' = -x$ lineair is, wordt de oplossing met beginwaarde $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$ gegeven door

$$x(t) = x_0 X(t - t_0) + x_1 Y(t - t_0).$$

De keuze $x_0 = X(t_0)$ en $x_1 = X'(t_0) = -Y(t_0)$ geeft vanwege de uniciteitsstelling de oplossing $X(t)$ zelf en dus concluderen we dat

$$X(t) = X(t_0)X(t - t_0) - Y(t_0)Y(t - t_0),$$

en ook, na differentiatie naar t en vermenigvuldigen met -1 , dat

$$Y(t) = X(t_0)Y(t - t_0) + Y(t_0)X(t - t_0).$$

Dit zijn de somregels voor $X = \cos$ en $Y = \sin$. Differentiatie links en rechts naar t en vervolgens $t = t_0$ invullen geeft $X'(t_0)$ en $Y'(t_0)$ in termen van $X(t_0)$, $Y(t_0)$, $X'(0) = 0$ en $Y'(0) = 1$, waarmee het klokje rond is.

De afleiding hierboven is volstrekt analoog aan de afleiding dat

$$\exp(t) = \exp(t_0) \exp(t - t_0),$$

de multiplicatieve eigenschap van de functie \exp , die volgt uit de eigenschappen van oplossingen van $x' = x$.

Identificeren we het x, y -vlak \mathbb{R}^2 met \mathbb{C} via $z = x + iy$, waarbij

$$i^2 = -1,$$

dan voldoet $Z(t) = X(t) + iY(t) = \cos t + i \sin t$ aan

$$Z(t) = Z(t_0)Z(t - t_0),$$

omdat

$$\begin{aligned} X(t) + iY(t) &= X(t_0)X(t - t_0) - Y(t_0)Y(t - t_0) \\ &\quad + i(X(t_0)Y(t - t_0) + Y(t_0)X(t - t_0)) \\ &= (X(t_0) + iY(t_0))(X(t - t_0) + iY(t - t_0)). \end{aligned}$$

Verder geldt

$$\begin{aligned} Z'(t) &= X'(t) + iY'(t) = -Y(t) + iX(t) \\ &= i(X(t) + iY(t)) = iZ(t), \end{aligned}$$

en $Z(0) = 1$. Het ligt dus voor de hand om

$$Z(t) = \exp(it) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

als notatie in te voeren.

De existentie-uniciteit stelling

Bij iedere functie $f(x)$ van één variabele kunnen we een differentiaalvergelijking

$$x'(t) = f(x(t))$$

opschrijven. Wat kunnen we in het algemeen zeggen over het bestaan van oplossingen?

Lokale existentie: Als f continu is op een open interval J dat x_0 bevat, dan is er een open interval I dat t_0 bevat waarop de DV $x'(t) = f(x(t))$ tenminste één oplossing $x(t)$ heeft met $x(t_0) = x_0$.

Dit is echt een stelling; een bewijs is op school niet haalbaar, de formulering wel. Het bewijs is gebaseerd op integratie van de DV van t_0 tot t . Dat geeft, voor het gemak met t_0 ,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds,$$

een integraalvergelijking die op diverse manieren kan worden aangepakt, bijvoorbeeld door iteratie, zie het verhaaltje uitgedeeld in Leiden.

Uniciteit: Als f ook voldoet aan

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|}$$

blijft begrensd als $x_1 \neq x_2$ door J lopen, dan is er een open interval I dat t_0 bevat waarop de DV $x'(t) = f(x(t))$ een unieke oplossing $x(t)$ heeft met $x(t_0) = x_0$.

In de praktijk: In het bijzonder is er lokale existentie en uniciteit als $f(x)$ een continue afgeleide heeft op een omgeving van x_0 .

Maximale existentie interval: Als de oplossing $x(t)$ niet voor alle $t > t_0$ bestaat dan is er een maximaal interval $[t_0, T)$ vooruit in de tijd waarop de oplossing bestaat. Als $t \rightarrow T$ geldt tenminste één van de volgende uitspraken

1. $x(t)$ komt willekeurig dicht bij de rand van J .
2. $x(t)$ is onbegrensd.

Een soortgelijke uitspraak geldt terug in de tijd voor $t < t_0$.

De volgende voorbeelden illustreren wat er mis kan gaan.

- a. $x' = x^2$, beginwaarde $x(0) = 1$,
onbegrensd oplossing $x(t) = \frac{1}{1-t}$.

- b. $x' = 2\sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$,
oplossingen $x(t) = 0$ en $x(t) = t^2$ voor $t \geq 0$.

Gekoppelde vergelijkingen

Voor stelsels van de vorm

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y); \\y' &= g(x, y),\end{aligned}$$

geldt soortgelijke stellingen.

Lokale existentie: Als f en g continu zijn op een rechthoek R die (x_0, y_0) bevat, (x_0, y_0) niet op de rand van R , dan is er een open interval I dat t_0 bevat waarop het stelsel tenminste één oplossing $(x(t), y(t))$ heeft met $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Uniciteit: Als f voldoet aan

$$\frac{|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|}{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|}$$

blijft begrensd als $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ in R , idem voor g , dan is er er een open interval I dat t_0 bevat waarop de oplossing met $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ uniek is.

In de praktijk: Als $f(x, y)$ en $g(x, y)$ op een omgeving van (x_0, y_0) gemaakt zijn door 'gewone' continue differentieerbare functies van één variabele te combineren via optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen (niet door nul) en samenstellen, dan is er lokale existentie en uniciteit van de oplossing met (x_0, y_0) als beginvoorwaarde op $t = t_0$.

Door het punt (x_0, y_0) gaat er dan precies één oplossingskromme, tenzij $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. In dat geval is de oplossing constant gelijk aan (x_0, y_0) en kunnen we niet echt over een kromme spreken.

Deze uitspraak is ook makkelijk uit breiden tot stelsels van meer vergelijkingen.

Maximale existentie interval: Als de oplossing niet voor alle $t > t_0$ bestaat dan is er een maximaal interval $[t_0, T)$ vooruit in de tijd waarop de oplossing bestaat. Als $t \rightarrow T$ geldt tenminste één van de volgende uitspraken

1. $(x(t), y(t))$ komt willekeurig dicht bij de rand van R .
2. $(x(t), y(t))$ is onbegrensd.

Een soortgelijke uitspraak geldt terug in de tijd voor $t < t_0$.

NB: Overall waar hierboven over een rechthoek gesproken wordt mag men ook een willekeurige deelverzameling van R van \mathbb{R}^2 nemen met $(x_0, y_0) \in R$, (x_0, y_0) niet op de rand van R .

Toegestaan in de praktijk zijn bijvoorbeeld

$$f(x, y) = e^{\sin(x^2+y^2)+\cos y} + \frac{y}{1+x^2}, \quad g(x, y) = \ln(1+x^2+y^2),$$

voor elke (x_0, y_0) , maar niet (althans niet meteen voor alle

(x_0, y_0))

$$f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)+\cos y} + \frac{y^2}{1+x^2}, \quad g(x, y) = e^{x+\cos y}.$$

Newton en Kepler

We zagen dat de slinger vergelijking $x'' = -x$ de beweging beschrijft van een puntmassa met massa 1 op een lijn onder de invloed van een krachtveld gegeven door $F = -x$. In deze sectie kijken we naar de differentiaalvergelijking (bewegingsvergelijking) voor zo'n puntmassa bewegend in de x, y, z -ruimte in een centraal krachtveld F . Het directe analogon zou zijn

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

maar dat geeft drie ontkoppelde gewone slinger vergelijkingen voor $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$. In plaats daarvan kijken we naar een krachtveld dat naar binnen gericht is, en dat kwadratisch afvalt met de afstand r tot de oorsprong, dus

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = - \frac{A}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Deze F heeft als som van de kwadraten van zijn componenten precies A gedeeld door $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Denk hierbij aan een universum met de zon vastgeprikt (in de oorsprong) en een planeet die als puntmassa beweegt onder invloed van de aantrekkingskracht van (alleen) de zon.

De positieve constante A kan ik, door tijd of plaats te schalen, gelijk aan 1 kiezen. Schalingsinvarianties zijn makkelijker te zien met de differentiaalquotientnotatie voor de afgeleiden, al zijn die wat moeilijk in de vector te proppen. Als we t met een factor C^3 schalen en x, y, z met een factor C^2 , dan blijft A hetzelfde. (Welke conclusie is hieruit te trekken?)

Van de drie gekoppelde tweede orde DV's is een stelsel van zes gekoppelde eerste orde DV's te maken,

$$\begin{aligned}x' &= -u; \\u' &= Ax(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\y' &= -v; \\v' &= Ay(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\z' &= -w; \\w' &= Az(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Met begincondities

$$x(0) = x_0, u(0) = u_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0, z(0) = z_0, w(0) = w_0,$$

heeft dit stelsel een unieke lokale oplossing, tenzij $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Als $(x(t), u(t), y(t), v(t), z(t), w(t))$ een oplossing is, dan is ook $(x(t), u(t), y(t), v(t), -z(t), -w(t))$ een oplossing.

Op grond van de lokale uniciteit van oplossingen moet een oplossing waarvoor $z(0) = w(0) = 0$ voor alle t waarvoor de oplossing bestaat ook voldoen aan $z(t) = w(t) = 0$. Anders zouden we een tweede oplossing kunnen maken door $z(t)$ en $w(t)$ een min te geven. We concluderen dat als de beginpositie en de beginsnelheid geen verticale component hebben ($z(0) = 0, w(0) = -z'(0) = 0$), de baan van de puntmassa in het x, y -vlak ligt.

Met poolcoördinaten r en φ schrijven we

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = x + iy = re^{i\varphi},$$

waarbij we de complexe notatie gaan gebruiken. Voor $r = r(t)$ en $\varphi = \varphi(t)$ als de onbekende functies van t worden de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r(t) \cos \varphi(t))'' \\ (r(t) \sin \varphi(t))'' \end{pmatrix} = -\frac{A}{r(t)^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix},$$

of, in complexe notatie,

$$(r(t)e^{i\varphi(t)})'' = -\frac{A}{r(t)^2}e^{i\varphi(t)}.$$

We gaan nu het linkerlid uitwerken met behulp van de productregel en de kettingregel voor differentiëren. We laten hierbij de variabele t weg uit de formules. De eerste afgeleide is

$$(re^{i\varphi})' = r'e^{i\varphi} + r(e^{i\varphi})' = r'e^{i\varphi} + rie^{i\varphi}\varphi'.$$

De tweede afgeleide is

$$\begin{aligned} (re^{i\varphi})'' &= (r'e^{i\varphi})' + (rie^{i\varphi}\varphi')' = \\ r''e^{i\varphi} + r'(e^{i\varphi})' + r'ie^{i\varphi}\varphi' + ri(e^{i\varphi})'\varphi' + rie^{i\varphi}\varphi'' &= \\ r''e^{i\varphi} + r'ie^{i\varphi}\varphi' + r'ie^{i\varphi}\varphi' + ri^2e^{i\varphi}\varphi'\varphi' + rie^{i\varphi}\varphi'' &= \\ e^{i\varphi}(r'' + 2ir'\varphi' - r(\varphi')^2 + ir\varphi'') &. \end{aligned}$$

Invullen in de complexe bewegingsvergelijking geeft

$$e^{i\varphi}(r'' + 2ir'\varphi' - r(\varphi')^2 + ir\varphi'') = -\frac{A}{r^2}e^{i\varphi}.$$

We delen nu door $e^{i\varphi}$. Dan

$$r'' + 2ir'\varphi' - r(\varphi')^2 + ir\varphi'' = -\frac{A}{r^2},$$

ofwel

$$r'' - r(\varphi')^2 + \frac{A}{r^2} + i(2r'\varphi' + r\varphi'') = 0 = 0 + 0i.$$

Reële en imaginaire delen links en rechts gelijkstellend vinden we nu het stelsel

$$\begin{aligned} r'' - r(\varphi')^2 + \frac{A}{r^2} &= 0 \\ 2r'\varphi' + r\varphi'' &= 0 \end{aligned}$$

De i is verdwenen en vanaf hier rekenen we weer reëel.

De laatste vergelijking kan, na vermenigvuldigen met r , geschreven worden als

$$(r^2\varphi')' = 0,$$

dus

$$r^2\varphi' = B = \text{constant}.$$

Dit is de perkenwet van Kepler, die zegt dat het verbindende lijnstuk tussen de oorsprong en het bewegende punt in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten doorloopt. Als deze constante nul is, dan vliegt het punt recht naar de oorsprong toe of recht van de oorsprong af, met alle vervelende gevolgen vandien.

We kunnen nu

$$\varphi' = \frac{B}{r^2}$$

invullen in de eerste vergelijking van het stelsel voor r en φ . Dat geeft

$$r'' = \frac{B^2}{r^3} - \frac{A}{r^2}.$$

Het is zo net alsof we een eendimensionale beweging hebben in een krachtveld gegeven door het rechterlid.

Essentieel is hier dat de exponent 2 kleiner is dan 3. Dat heeft tot gevolg dat de 'kracht'

$$F = \frac{B^2}{r^3} - \frac{A}{r^2}$$

voor r groot negatief is en het punt dus naar binnen getrokken wordt (de kwadratische term overheerst), terwijl voor r dicht bij nul F positief is en het punt naar buiten geduwd wordt (de kubische term overheerst). Daartussen zit een evenwicht waar de oplossing omheen slingert, met, gelukkig, $r(t) > 0$ voor alle t , zoals we nog zullen zien.

De A/r^2 in de formule staat nog steeds voor de grootte van het oorspronkelijke krachtveld. Fysisch gezien is deze omgekeerd evenredig met r^2 omdat de (zwaarte)kracht zich moet verdelen over de oppervlakte van een bol met straal r . De exponent 2 is gelijk aan $3 - 1$, waarbij 3 de dimensie van onze ruimte is. In een 4-dimensionale ruimte zou de 2 dus een 3 worden en in een N -dimensionale ruimte een $N - 1$. Voor de DV

$$r'' = \frac{B^2}{r^3} - \frac{A}{r^{N-1}}$$

gaat de geruststellende analyse hierboven alleen door als $N < 4$. Voor $N > 4$ is het juist de afstotende 'kracht' die ver weg, en de aantrekkende 'kracht' die dicht bij overheerst. Evenwicht is dan ver te zoeken. Ook met $N = 4$ gaat het mis. Stabiele banen zijn alleen maar mogelijk voor dimensie N ten hoogste 3.

In de rest van het verhaal nemen we $B > 0$. Vermenigvuldigen van de r -vergelijking (met $N = 3$) met r' geeft, als we alles weer naar een kant brengen,

$$r'r'' - \frac{B^2r'}{r^3} + \frac{Ar'}{r^2} = 0,$$

ofwel

$$\frac{(r')^2}{2} + \frac{B^2}{2r^2} - \frac{A}{r} = \text{constant},$$

een behouden grootheid, net als bij de slingervergelijking, zie Figuur 3, links.

We kunnen hieruit verder redeneren en concluderen dat $r(t)$ een positieve periodieke functie is. Dat in één periode de hoek $\varphi(t)$ precies 2π toeneemt, met andere woorden dat de baan gesloten is, is minder evident en eigenlijk het gevolg van een klein wonderdje.

Het wonderdje openbaart zich als we als nieuwe *onafhankelijke* variabele φ (i.p.v. t), en als nieuwe *afhankelijke* variabele $w = \frac{1}{r}$ nemen. We krijgen dan, met de kettingregel, en ook omdat

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{B}{r^2} = Bw^2,$$

dat

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{w} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\varphi} Bw^2 = -B \frac{dw}{d\varphi},$$

en

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-B \frac{dw}{d\varphi} \right) = -B \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt} = -B^2 \frac{d^2 w}{d\varphi^2} w^2,$$

zodat de vergelijking voor $r(t)$ (met N) overgaat in de vergelijking

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = \frac{A}{B^2} w^{N-3}$$

voor $w(\varphi)$.

Het wonder is de $w^0 = 1$ in het rechterlid als $N = 3$. We krijgen dan een lineaire inhomogene tweede orde DV voor $w(\varphi)$ die exact oplosbaar is. Het lijkt wel een tentamensom die zo voorbereid is dat het antwoord goed uitkomt. De w -vergelijking heeft een (hele) bijzondere oplossing, namelijk

$$w(\varphi) = \frac{A}{B^2}.$$

Omdat, zoals we gezien hebben, de 'homogene' vergelijking

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = 0$$

als algemene oplossing $w(\varphi) = a \cos \varphi + b \sin \varphi$ heeft, met a en b vrije constanten, is de algemene oplossing van de 'inhomogene' w -vergelijking te schrijven als

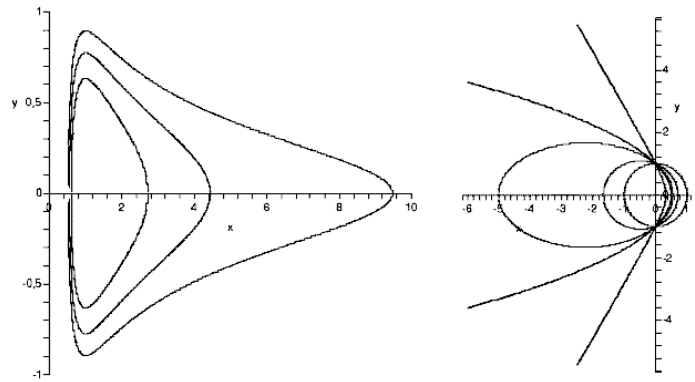
$$w(\varphi) = \frac{A}{B^2} + a \cos \varphi + b \sin \varphi.$$

Na een geschikte draaiing van ons coördinatenstelsel is kunnen we de baan beschrijven als

$$r = r(\varphi) = \frac{R}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad R = \frac{B^2}{A}$$

met $\varepsilon \geq 0$ en φ_0 vrije constanten. Dit is de formule voor een kegelsnede met brandpunt in de oorsprong: $\varepsilon = 0$ geeft een cirkel, $0 < \varepsilon < 1$ een ellips, $\varepsilon = 1$ een parabool en $\varepsilon > 1$ een (tak van een) hyperbool, zie Figuur 3, rechts.

Wie dat niet meteen ziet is in goed gezelschap, zie Arthur Koestler's boek *The Sleepwalkers*. We schrijven de formule voor r als $R = r + \varepsilon r \cos \varphi = r + \varepsilon x$, dus $r = R - \varepsilon x$, zo dat, na kwadra-



Figuur 3 Links: in het r, r' -vlak beweegt de oplossing zich over een gesloten kromme waarlangs $r(t) > 0$, $A = B = 1$; rechts: oplossingen $r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = 1$, $\varepsilon = 0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1, 2$.

teren en sorteren,

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + 2\varepsilon Rx + y^2 = R^2.$$

Voor $\varepsilon^2 < 1$ inderdaad een ellips, met kleinste en grootste diameter gelijk aan

$$\frac{2R}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad \frac{2R}{1 - \varepsilon^2}, \quad \text{en oppervlakte } O = \frac{\pi R^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(de kleinste diameter is dus niet $2R$). Die oppervlakte is ook gelijk aan

$$O = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi =$$

(substitueer $\varphi = \varphi(t)$ en gebruik de perkenwet)

$$\int_0^T \frac{1}{2} r(\varphi(t))^2 \varphi'(t) dt = \int_0^T \frac{1}{2} B dt = \frac{BT}{2},$$

waarin T de omlooptijd is. Samenvattend hebben we voor R en T

$$R = \frac{B^2}{A}, \quad T = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{B^3}{A^2}.$$

Hier is A de constante in de bewegingsvergelijking waar we mee zijn begonnen. De constante B was een vrije constante in de oplossing. We zien dus dat de derde macht van R en de tweede macht van T aan elkaar gekoppeld zijn via ε , de *excentriciteit* van de ellips. In termen van de halve lange as a is het verband het mooist,

$$a^3 = A \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2,$$

met dank aan Gert Heckman, die me hier op wees nadat ik slaap-rekenend doorgewandeld was met de foutieve kleinste diameter. Ach ja...

Referenties

1. www.math.vu.nl/~jhulshof/echtebrwwiskunde.pdf
2. Koestler, A., *The Sleepwalkers: A History of Man's Changing Vision of the Universe*, Penguin, 1990