

# **Begeleidingsschema voor de Dubbele Slinger**

Project didactiek



Begeleiding: J. Buning

4 juni 2007, Vrije Universiteit Amsterdam

## ***Inhoudsopgave***

|              |   |
|--------------|---|
| 1. Inleiding | 3 |
|--------------|---|

### *Achtergrond informatie*

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| 2. Chaos                       | 4  |
| 3 Concepten in fase ruimte     | 6  |
| 4. Lyapunov exponenten         | 9  |
| 5. Chaos in de dubbele slinger | 11 |

### *Begeleidingsschema*

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| 6. Leerdoelen experiment               | 13 |
| 7. Het introduceren van het experiment | 15 |
| 8. Discussiëren met studenten          | 16 |
| 9. Ideeën voor onderzoek               | 19 |

## 1. Inleiding

Het natuurkunde practicum heeft de lastige taak studenten te leren om experimenteel onderzoek te doen. Het is echter moeilijk om een enigszins gecontroleerde omgeving te creëren die een authentieke onderzoeksituatie simuleert. Op het eerstejaars practicum is hier nog geen sprake van. Daar gaat de aandacht uit naar basisvaardigheden. Op het tweedejaars practicum vindt er echter een geleidelijke overgang plaats waarin er steeds meer een echte onderzoeksituatie gecreëerd wordt. De dubbele slinger is een opstelling die hier uitermate geschikt voor is.

Met deze relatief eenvoudige opstelling kan chaos bestudeerd worden. Chaos is een rijk en redelijk nieuw gebied in de wis- en natuurkunde. Studenten en begeleiders hebben echter weinig voorkennis op het gebied van chaos en de literatuur is al snel erg geavanceerd. Met de opstelling die op het practicum staat, kan men een enorme verscheidenheid aan complexe verschijnselen uit de niet-lineaire dynamica bestuderen. De reden waarom deze opstelling zo geschikt is om een authentieke experimentele onderzoeksituatie te simuleren, hangt samen met de complexiteit van dit systeem die met een deze eenvoudige opstelling onderzocht kan worden.

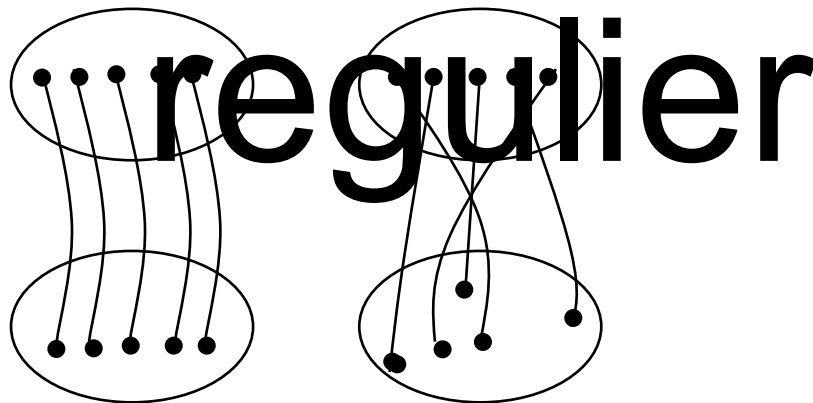
In dit verslag wordt een begeleidingsschema uitgewerkt die bruikbaar is voor een assistent die dit experiment gaat begeleiden. De nodige achtergrondinformatie wordt kort uitgewerkt en er wordt vooral veel aandacht besteedt aan hoe dit experiment begeleid kan worden. De leerdoelen voor dit experiment worden uitgewerkt en er worden een aantal sleutelsituaties besproken. Bij het bespreken van de sleutelsituaties wordt tevens aandacht besteed aan het omschakelen tussen verschillende begeleidingsniveaus. Tot slot sommen we enkele onderzoeksideo's op ter inspiratie.

## Achtergrond informatie

### 2. Chaos

In dit hoofdstuk bespreken wij wat er precies met chaos bedoeld wordt. Eerst wordt dit verschijnsel kwalitatief besproken en daarna formuleren we een definitie die experimenteel verifieerbaar is.

Elk dynamisch systeem dat beschreven wordt door een differentiaalvergelijking (DV), zoals de tweede wet van Newton, is deterministisch. Als op een bepaald tijdstip de oplossing van de DV bekend is, kan de DV geïntegreerd worden om op elk tijdstip in de toekomst de oplossing *exact* te vinden. Er moet echter onderscheid gemaakt worden tussen twee klassen van systemen. Een *regulier* systeem heeft als eigenschap dat oplossingen van het systeem in de tijd dicht bij elkaar blijven. In een *chaotisch* systeem is dit niet het geval. De eigenschappen van de twee verschillende klassen systemen wordt schematisch geïllustreerd in figuur 1.



**Figuur 1** Schematische weergave van het verschil tussen een regulier en een chaotisch systeem. (ref. *Elements of Newtonian mechanics*, Knudsen and Hjorth, third edition)

Ondanks de deterministische eigenschap van een chaotisch systeem, is de voorspelbaarheid in de praktijk gering. De begintoestand van een systeem is altijd met een eindige nauwkeurigheid bekend. Vanwege het chaotische karakter kunnen de verschillende begintoestanden binnen dit onzekerheidsinterval leiden tot een compleet verschillende evolutie in de tijd. De voorspelbaarheid neemt dus snel af in de tijd. Dit gedrag zal verderop kwantitatief geanalyseerd worden met behulp van de *Lyapunov exponent*.

Ter illustratie bespreken wij een aantal typische chaotische systemen. Het weer is een van de meest bekende chaotische systemen. Vanwege de complexiteit van dit systeem heeft het echter weinig didactische waarde. Een belangrijk en illustratief voorbeeld is het stromingspatroon van de rook van een sigaret (zie figuur 2). De hete rook stijgt eerst laminair. Op een bepaalde hoogte boven de sigaret wordt de stroming echter instabiel en treedt er turbulentie op. Rookdeeltjes die aanvankelijk zeer vergelijkbare paden hadden, volgen na de instabiliteit zeer uiteenlopende paden. Deze foto laat dus een uitstekend voorbeeld van chaotisch gedrag zien in mooi contrast tot regulier gedrag.



**Figuur 2** *De opstijgende rook van een sigaret laat heel mooi het verschil zien tussen chaotisch en regulier gedrag. De rookkolom stijgt eerst laminair totdat er een instabiliteit is waarna er turbulentie optreedt.*

### 3. Concepten in fase-ruimte

In dit hoofdstuk bespreken we kort wat er met fase-ruimte bedoeld wordt en enkele belangrijke concepten die daar mee samenhangen.

De Tweede wet van Newton kan geschreven worden als

$$m\ddot{q} = F(q) \quad (4.1)$$

Voor elke coördinaat  $q$  kan men de variabele  $\omega = \dot{q}$  definiëren. Met behulp van deze variabele kan de bewegingsvergelijking (een tweede orde DV) herschreven worden als een stelsel eerste orde DV's.

$$\dot{q} = \omega \quad (4.2)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{m} F(q) \quad (4.3)$$

De dynamische variabelen  $q$  en  $\omega$  specificeren de toestand van het systeem volledig. Als de toestandsvector  $(q, \omega)$  op een bepaald tijdstip bekend is, kunnen deze vergelijkingen geïntegreerd worden om het pad in  $q$ - $\omega$  ruimte (oftewel fase-ruimte) precies te bepalen. De fase-ruimte blijkt een zeer belangrijke *representatie* om het gedrag van dynamische systemen te bestuderen. We zullen het begrip fase-ruimte toelichten met een aantal voorbeelden.

De bewegingsvergelijkingen van een eenvoudige slinger kunnen geschreven worden als:

$$\dot{\theta} = \omega \quad (4.4)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l} \theta \quad (4.5)$$

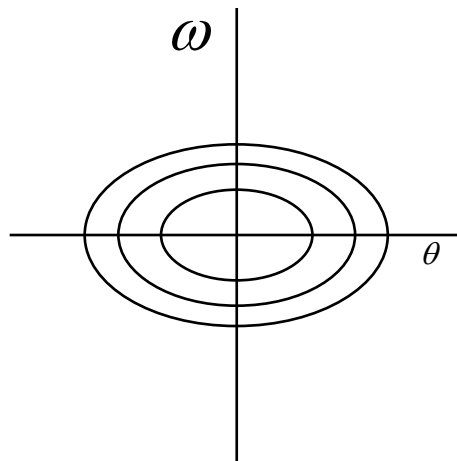
Hierin is  $\theta$  de hoek die de slinger maakt met de vertikaal,  $g$  de valversnelling en  $l$  de lengte van de slinger. Voor elke set beginvoorwaarden, geven deze bewegingsvergelijkingen een ellips in  $\theta$ - $\omega$ -ruimte (zie figuur 3). Dit systeem is duidelijk niet chaotisch.

De niet-lineaire slinger heeft het volgende stelsel (niet-lineaire) bewegingsvergelijkingen

$$\dot{\theta} = \omega \quad (4.6)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (4.7)$$

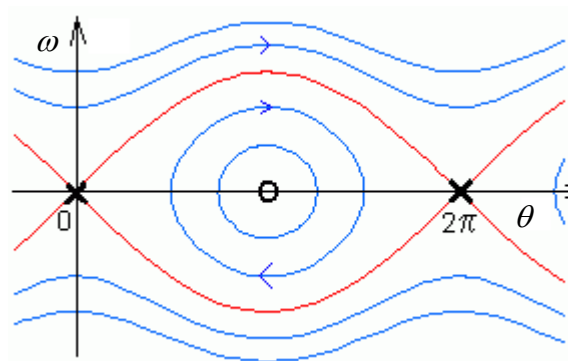
Deze differentiaal vergelijkingen zijn exact oplosbaar en de oplossingen kunnen uitgedrukt worden in analytische functies. De fase-ruimte van dit systeem wordt weergegeven in figuur 4. Er zijn 2 klassen paden die gescheiden worden door de zogenaamde *seperatrix* (weergegeven in rood). De paden binnen de seperatrix lijken zeer op de paden van de eenvoudige slinger en beschrijven oscillaties met een hoek kleiner dan  $\pi$ . Naarmate de hoek groter wordt, wijken de orbitalen in fase-ruimte meer af van een perfecte ellips. De seperatrix (rood) beschrijft het pad waarbij de slinger precies vertikaal naar boven stil kan staan.



**Figuur 3** Het fase-ruimte diagram van de eenvoudige slinger.

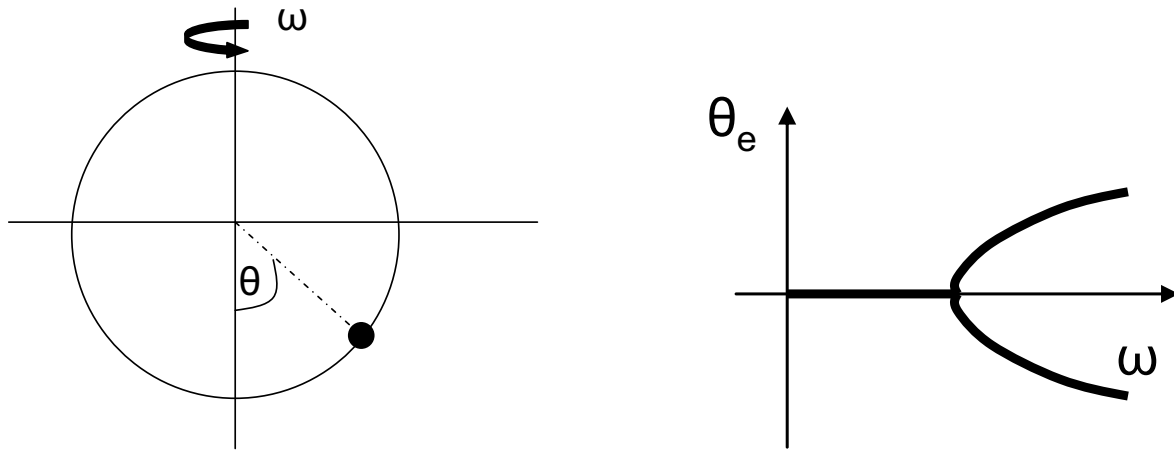
De punten waarbij de slinger precies vertikaal naar boven of naar beneden staat, heten *stationair*. Het stationair punt waarbij de slinger naar boven staat is duidelijk instabiel. In het fase-ruimte diagram is dit punt aangegeven met een kruisje. Merk op dat de paden in fase-ruimte elkaar hier niet kruisen. **Dit is in het algemeen niet mogelijk.** De paden buiten de seperatrix zijn periodiek en beschrijven een slinger die om zijn as draait.

Ondanks het niet-lineaire karakter van de bewegingsvergelijkingen is het systeem niet chaotisch. Paden binnen en buiten de seperatrix zijn periodieke orbitalen die dicht bij elkaar blijven. Dit voorbeeld zal zeer nuttig blijken in het bespreken met studenten waarom de dubbele slinger chaotisch is.

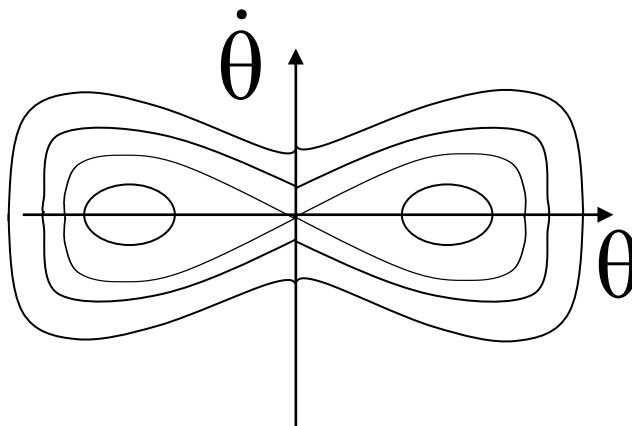


**Figuur 4** Het fase-ruimte diagram van de niet-lineaire slinger. De seperatrix is weergegeven in het rood.

Het laatste voorbeeld dat we kort bespreken is een kraal dat kan glijden over een hoepel. De hoepel roteert met een frequentie  $\omega$  om een as evenwijdig aan de gravitatie versnelling (zie figuur 5a). Bij een lage rotatiefrequentie heeft de kraal een evenwichtspositie  $\theta_e=0$ . Boven een bepaalde kritische hoekfrequentie zijn er twee evenwichtsposities mogelijk (zie figuur 5b). Het punt dat eerst een evenwichtspunt was ( $\theta_e=0$ ), is onstabiel geworden. Dit soort gedrag wordt een *bifurcatie* genoemd. De kritische frequentie is de frequentie waarbij de centrifugale kracht groter begint te worden dan de zwaartekracht.



**Figuur 5** a) een schematische weergave van een kraal dat over een roterende hoepel kan glijden. De rotatie-as is evenwijdig aan de gravitatie versnelling. b) Bij een kritisch rotatiefrequentie treedt er een bifurcatie op en is het punt  $\theta_e=0$  geen evenwichtspunt meer, maar zijn er twee nieuwe daarvoor in de plaats gekomen.



**Figuur 6** Het fase-ruimte diagram van het systeem uit figuur 5 a.

In figuur 6 is het fase-ruimte diagram weergegeven voor dit systeem. De verschillende lijnen geven verschillende waarden van de parameter  $\omega$  weer. Als  $\omega$  klein is (buitenste lijn), lijkt het systeem op dat van de lineaire slinger. Als  $\omega$  toeneemt en op een gegeven moment de kritische waarde passeert, ontstaan er twee nieuwe paden, namelijk de vervormde ellipsen aan de linker en de rechter kant van de as. Er is dus een bifurcatie opgetreden.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Zij die het verschijnsel “spontaneous symmetry breacking” kennen, zullen enkele analogieën ontdekken.

## 4. Lyapunov exponenten

Het aantal vrijheidsgraden  $n$  van een systeem in 3 dimensies met  $N$  deeltjes wordt gegeven door

$$n = 3N - m \quad (5.1)$$

waarbij  $m$  het aantal vergelijkingen is die de beperkingen (bijvoorbeeld dat 2 deeltjes aan elkaar vast zitten) van het systeem beschrijven. Let op, in sommige teksten bedoeld men met vrijheidsgraden alle variabele die nodig zijn om de toestand van het systeem te specificeren. In dit geval heeft de eenvoudige slinger niet 1 ( $\theta$ ) maar 2 ( $\theta$  en  $\omega$ ) vrijheidsgraden. Deze definitie houden wij hier NIET aan.

Zoals in het vorige hoofdstuk beschreven staat, kan de dynamica van een systeem beschreven worden door een stelsel eerste orde DV's. Voor de eenvoud beschouwen we hier een systeem met 1 vrijheidsgraad.

$$\dot{x} = f(x) \quad (5.2)$$

We beperken ons hierbij ook tot systemen waarbij de functie  $f$  geen tijdsafgeleiden (autonome systemen) van de dynamische variabele bevat.

We beschouwen 2 paden  $x'$  en  $x' + \Delta x$  die op tijdstip  $t_0$  dicht bij elkaar liggen. De tijdsevolutie van het verschil van deze twee vergelijkingen wordt gegeven door

$$\Delta \dot{x} = f(x' + \Delta x) - f(x') \quad (5.3)$$

Aangezien  $\Delta x$  klein is, geldt:

$$\Delta \dot{x} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x'} \Delta x \quad (5.4)$$

Ofwel

$$\Delta \dot{x} = \lambda \Delta x \quad (5.5)$$

$$\text{waarbij } \lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x'}.$$

De oplossing van deze vergelijking is

$$\Delta x(t) = \Delta x(0) e^{\lambda t} \quad (5.6)$$

$\lambda$  wordt ook wel de *Lyapunov exponent* genoemd.

Er zijn 2 belangrijke gevallen onderscheidbaar.

1.  $\lambda < 0$  De paden blijven dicht bij elkaar en we spreken van regulier gedrag.
2.  $\lambda > 0$  De paden lopen snel uit elkaar en we spreken van chaotisch gedrag.

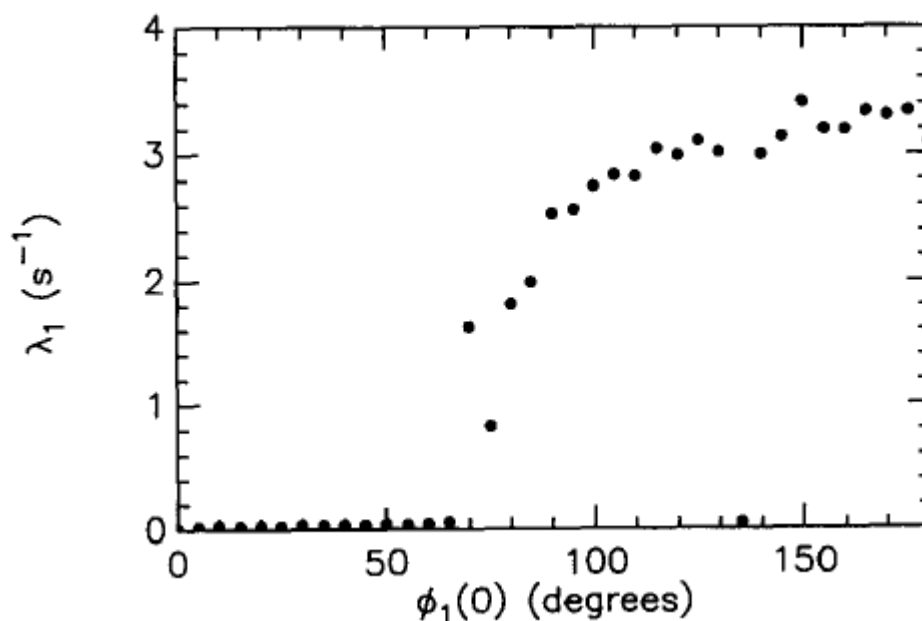
Voor een systeem met  $n$  vrijheidsgraden zijn er  $2n$  Lyapunov exponenten. We zijn nu in staat om een definitie van chaos te formuleren

### **Definitie**

*Een systeem is chaotisch als tenminste 1 van de Lyapunov exponenten positief is.*

## 5. Chaos in de dubbele slinger

De bewegingsvergelijking voor de dubbele slinger zijn niet-lineair. Het blijkt dat dit een essentieel ingrediënt is voor het optreden van chaos. Het is echter niet zo dat elk niet-lineair systeem per se chaotisch gedrag vertoont, zoals we gezien hebben bij de niet-lineaire slinger. In figuur 5 zijn de numeriek berekende (grootste) Lyapunov exponenten weergegeven als functie van de beginhoek van de dubbele slinger. Dit diagram geeft aan dat de dubbele slinger voor grotere beginhoeken een chaotisch systeem is. Strikt gezien is de ongedreven chaotische slinger niet chaotisch omdat damping het systeem altijd naar de zelfde eindtoestand brengt. Wij komen hier later op terug.



**Figuur 7** De grootste Lyapunov exponent als functie van de beginhoek. Deze waarden zijn gevonden met behulp van numerieke berekeningen.  $\phi_1$  is de hoek die het bovenste segment van de slinger maakt met de vertikaal. (ref: Levien and Tan, *AM. J. Phys.* **61**, 11 (1993))

## **Het begeleidingsschema**

In dit onderdeel gaan we in op het begeleiden van het Dubbele Slinger Practicum voor tweedejaars natuurkunde studenten. We zullen op meerdere plaatsen in de tekst verwijzen naar het zogenaamde begeleidingsniveau. Tijdens het begeleiden neemt de assistent een bepaalde houding aan ten opzichte van de studenten. De beste houding die men aanneemt hangt natuurlijk af van de betreffende situatie en het type studenten maar ook van de leerdoelen af van het betreffende practicum. Het is dus ook belangrijk om de leerdoelen bij een practicum scherp te formuleren. De houding of de rol die de assistent aanneemt beschrijven wij met de verschillende begeleidingsniveaus.

We onderscheiden vier begeleidingsniveaus:

- B1 Strakke begeleiding: de assistent neemt de student aan de hand in het oplossen en doet eventueel voor hoe te onderzoeken.
- B2 De assistent is meer een coach en geeft open opdrachten en helpt zo de studenten op weg.
- B3 De assistent is slechts beoordelaar in hoeverre de onderzoeksvaardigheid naar behoren is uitgevoerd en laat het over aan de studenten zelf hoe zij de situatie aanpakken.
- B4 De assistent stelt zich op als een collega met meer onderzoekservaring. Samen met de studenten verkent de assistent een nieuw probleem.

## 6. Leerdoelen

Bij het begeleiden van een experiment is het van belang continu in je achterhoofd te hebben wat de leerdoelen zijn van het experiment. Dit is ook van belang voor het begeleidingsniveau die je kiest. Aangezien studenten in de B-serie zelf een onderzoeksvraag mogen formuleren en binnen een bepaalde marge hun eigen gang mogen gaan, is het moeilijk van te voren alle leerdoelen vast te stellen. In dit hoofdstuk formuleren we leerdoelen die bij dit experiment van belang kunnen zijn. Welke leerdoelen je kiest hangt natuurlijk ook af van het niveau van de studenten die je begeleid.

We noemen eerst de standaard leerdoelen die bij de B-serie horen

- Formuleren van het experimentele probleem
- Een gegeven probleem kunnen vertalen in meetbare grootheden
- Een geschikte meetmethode kunnen kiezen
- Weet hebben hoe valide en betrouwbaar hun resultaten zijn
- Resultaten kunnen analyseren in het licht van de vraagstelling
- Hun experimentele handelingen kunnen plannen
- Juiste conclusies trekken uit hun resultaten

Hier werken we nog een aantal subleerdoelen uit (die deels overlappen met de bovengenoemde doelen) binnen de context van dit practicum.

### Conceptuele leerdoelen

1. Het begrijpen van elementaire begrippen voor dynamische systemen (fase-ruimte, seperatrix, vrijheidsgraad,...)
2. Het begrijpen van enkele begrippen uit de chaostheorie zoals de Lyapunov exponent en een bifurcatie. De student moet in staat zijn uit te leggen wat een chaotisch systeem van een regulier en een stochastisch systeem onderscheidt en hoe je **experimenteel** kunt bepalen of een systeem chaotisch is.
3. Een student moet in staat zijn om uit te leggen hoe chaos zich uit in fase-ruimte (De applet op [http://www.mypysicslab.com/dbl\\_pendulum.html](http://www.mypysicslab.com/dbl_pendulum.html) kan bruikbaar zijn)

### Onderzoeksvaardigheden

Een grote groep studenten heeft een sterke neiging elk systeem eerst helemaal theoretisch te willen begrijpen en uit te werken, alvorens het experimenteel te willen onderzoeken. Bij experimenteel onderzoek is het echter dikwijls zo dat het fenomeen nog niet begrepen is (dit maakt het juist zo interessant om het te onderzoeken). Het is daarom belangrijk dat studenten leren om te gaan met een dergelijke situatie. De dubbele slinger is een fantastisch experiment om zo een omgeving te creëren. Studenten hebben weinig of geen kennis van chaotische systemen in hun tweede jaar. Omdat niet-lineaire dynamische systemen nogal lastig zijn, is het in de regel niet mogelijk voor studenten om zich snel deze complexe theorie eigen te maken. Daarbij zijn de bewegingsvergelijkingen nogal ingewikkeld en niet analytisch oplosbaar. Een samenspel van deze factoren zorgt ervoor dat een student bij dit experiment

simpelweg de tijd en de voorkennis niet heeft of het helemaal theoretisch uit te werken. We formuleren een aantal leerdoelen dat hier op van toepassing is.

4. Een student moet zich in het eerste dagdeel de belangrijke concepten eigen maken met behulp van de literatuur, de assistent en zijn/haar partner. Het is belangrijk dat de student niet de weg kwijt raakt in een jungle van informatie en de vaak aanwezige neiging alles te willen begrijpen, beheerst. Dit is immers niet mogelijk in deze korte tijd.
6. Er zijn een aantal relatief eenvoudige artikelen (o.a. uit American Journal of Physics) bij dit experiment beschikbaar. Studenten moeten binnen korte tijd de nodige informatie dat voor hen van belang is uit deze artikelen halen. Als assistent kun je dit ook aansturen door met hen bepaalde onderdelen te bediscussiëren.
7. Het kunnen koppelen van de bij 1 genoemde begrippen aan de waarnemingen bij de dubbele slinger. Het linken van de conceptuele kennis aan het gedrag van het systeem. Treden er bifurcaties op? Welke stationaire punten zijn er in het systeem? Hoe zien de paden er uit in de fase-ruimte? Is er een seperatrix? Is de beweging periodiek?...
8. Een student moet eenvoudige vragen formuleren die bij deze opstelling passen. Bijvoorbeeld: Is dit een chaotisch systeem? Hoe kan ik dit (experimenteel) aantonen? Of juist weerleggen? Waarom is dit een chaotisch systeem?
9. Het automatiseren van de data analyse. Bij dit experiment wordt vaak heel veel van hetzelfde type data gegeneerd. De slinger wordt bijvoorbeeld heel vaak van dezelfde hoek laten vallen. Het is daarom handig om de data analyse methode te automatiseren met behulp van een macro in Origin.
10. De opstelling van de dubbele slinger leent zich slecht voor een a-priori foutenafschutting. Het is daarom belangrijk dat een student een andere manier bedenkt om de fout af te schatten. Bij deze opstelling is het handig gewoon N maal een (onafhankelijke) meting te doen. De student kan dan kijken hoe zijn metingen verdeeld zijn en wat de reproduceerbaarheid is van het experiment.

Deze 10 leerdoelen kunnen een basis vormen van dit practicum. Uiteraard kunnen deze verder uitgebreid worden of kunnen ze afhankelijk van het niveau van de studenten en de beschikbare tijd aangepast en beperkt worden.

## 7. Het introduceren van het experiment

Omdat de dubbele slinger een lastig experiment is en de studenten weinig of geen voorkennis over niet-lineair en chaotische systemen hebben, is het van belang het experiment grondig te introduceren. Het belangrijkste doel hiervan is dat je de student naast de praktische kennis (hoe werkt de opstelling) en het aanreiken van een aantal basisconcepten (wat is chaos?) de student een bepaald overzicht geeft. Reik de studenten een paar artikelen aan en een aantal oude verslagen. Spreek met de studenten een bepaald doel af voor het eerste dagdeel. Bijvoorbeeld dat ze kunnen aantonen dat dit systeem chaotisch is voor bepaalde beginhoeken en regulier is voor andere beginhoeken. Vraag ze kort mondeling samen te vatten wat er in de artikelen staat en wat er tot dusver door studenten gedaan is.

Je kunt bij aanvang van het practicum kijken hoeveel kennis de studenten over dit soort systemen hebben door samen kennis te mobiliseren. Bij de introductie is het raadzaam het begeleidingsniveau B1 (strakke begeleiding) te hanteren. Je geeft hiermee de studenten een snelle start en je kunt er zeker van zijn dat ze een correcte basis hebben. Wel kun je er voor kiezen een paar vragen open te laten en ze aan de studenten als opdracht voor het eerste dagdeel op te geven. Het is vaak zo dat studenten zich afhankelijk gaan opstellen als je te lang een strakke begeleiding hanteert. Wees hier dus voorzichtig mee.

## 8. Discussiëren met studenten

Het is leuk en heel leerzaam (voor de assistent en de studenten) om regelmatig met de studenten in discussie te gaan. Je kunt hiermee tevens de studenten zich laten verantwoorden voor hun werkzaamheden. Het komt vaak voor dat studenten (maar ook meer ervaren wetenschappers) na het formuleren van een onderzoeksplan, dit plan als een kip zonder kop gaan uitwerken. Het is dan de taak van de assistent om de student weer op scherp te zetten.

Dit deel van het begeleiden is moeilijk om een aantal redenen. Het zal vaak voorkomen dat er een vraag of probleem bediscussieerd wordt waar jij als begeleider ook de oplossing niet op weet. Dit is niet erg en wees er eerlijk en open over tegenover de studenten. Neem een collegiale houding aan ten opzichte van de studenten en probeer samen het probleem te verkennen. Dikwijls is het heel leerzaam voor de studenten om te zien hoe iemand met net iets meer ervaring het aanpakt. Probeer na afloop met de studenten te analyseren waarom de aanpak die jullie gebruikt hebben goed of slecht was.

Een andere reden waarom dit onderdeel moeilijk is, is omdat je vaak moet wisselen tussen verschillende begeleidingsniveaus. In de meeste gevallen zal begeleidingsniveau B2 het meest aangehouden worden. Als het dreigt mis te gaan of als je vindt dat de studenten teveel tijd besteden aan een onbelangrijk probleem kun je ervoor kiezen om naar begeleidingsniveau B1 over te gaan. Maar ook zal regelmatig begeleidingsniveau B4 gekozen worden.

Voorbeeld:

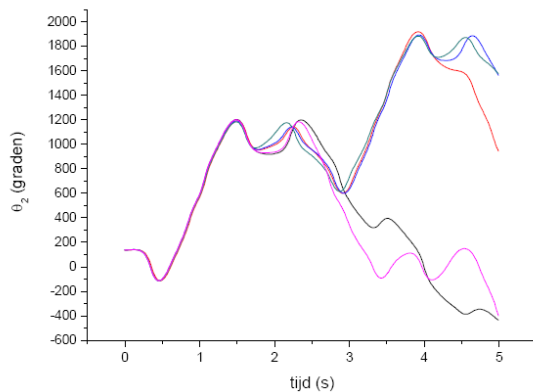
*Twee studenten bepalen de Lyapunov exponent door het verschil van twee paden aan een exponent te fitten over de eerste 0.5 s van de metingen. De assistent vraagt de studenten waarom zij dit interval gekozen hebben (begeleidingsniveau B3). De studenten vertellen dat zij in een artikel hebben gelezen dat de auteurs dit tijdsinterval hebben gekozen en dat zij dat daarom ook doen. De assistent vraagt de studenten of de auteurs van het artikel aangeven waarom dit tijdsinterval gekozen werd. De studenten weten het niet. De assistent beseft dat de studenten in een valkuil zijn gevallen en schakelt over op begeleidingsniveau B1. Na controle blijkt dat de auteurs geen duidelijke reden hiervoor aangeven. De assistent vraagt de studenten of het verstandig is om blindelings op te volgen wat anderen hebben gedaan. Je moet immers in staat zijn zelf je eigen methoden, resultaten en conclusies kunnen verdedigen. Na deze "les" gaan ze weer verder. Eerst verkent de assistent samen (begeleidingsniveau B4) met de studenten de verschillende factoren waar men rekening mee moet houden bij het kiezen van het meetinterval (damping, geldigheid van de theorie, fit procedures...). De assistent geeft de studenten de opdracht om een experimentele aanpak te hanteren en hun data te analyseren met verschillende meetintervallen. De studenten krijgen de vraag mee hoe het resultaat afhangt van het gekozen meetinterval.*

Een belangrijk deel van onderzoek doen is kritisch te zijn over wat je doet en hoe je het doet. Probeer studenten te prikkelen om kritisch te zijn. Je kunt dit doen door vragen te stellen over de theorie (wat is de geldigheid van deze theorie? Kan de Lyapunov exponent ook complex zijn en zo ja wat betekent dat dan?) over hun meetmethode (b.v. waarom kiezen jullie dit meetinterval?) .

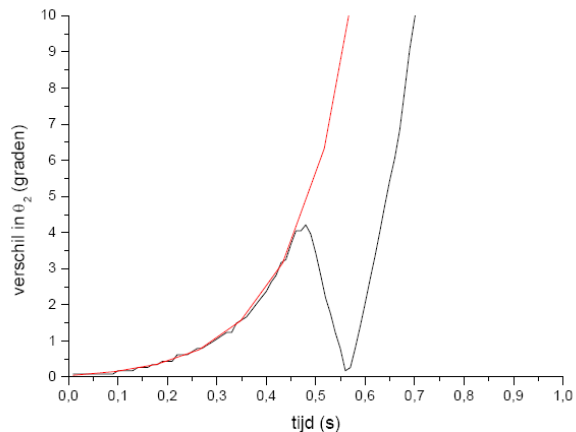
Dit raakt de kern van het onderzoek doen en is wellicht het allerbelangrijkst. Zorg ervoor dat je in jouw manier van begeleiden hier aandacht aan geeft.

Ter illustratie van deze opmerkingen werken we nog een situatie uit:

Deze situatie doet zich tijdens de werkplanbespreking voor. De studenten lichten hun methode toe en de assistent stelt kritische vragen. De studenten laten deze proefmetingen zien. We zien een grafiek met  $\theta_2$  (de hoek die het onderste segment van de slinger maakt met het bovenste segment) voor verschillende runs als functie van de tijd.



Grafiek 1



grafiek 2

(deze metingen zijn gedaan door I. Brouwer en J.W. Knibbe in 2007)

De assistent vraagt of je uit grafiek 1 kan concluderen dat er sprake is van chaos. De studenten zeggen dat deze grafiek dat inderdaad laat zien omdat paden met zeer vergelijkbare begincondities uiteindelijk sterk uit elkaar gaan lopen. De assistent vraagt hoe het komt dat de chaos pas na 1.6 s optreedt. Hier moeten de studenten even over nadenken (hebben ze dus nog niet gedaan). Een van de studenten merkt op dat er iets bijzonders aan de hand moet zijn met dat punt, maar hij weet niet precies wat. De assistent vraagt de studenten of ze misschien ook fase-ruimte plotjes bij zich hebben van deze metingen. Dat hebben ze helaas niet maar ze zien wel in dat het gedrag rond dit specifieke punt best eens duidelijk zou kunnen worden uit het gedrag in fase-ruimte. De assistent merkt op dat het gebruiken van meerdere representaties heel handig kan zijn in de natuurkunde. De assistent spreekt met de studenten af dat ze dit na de werkplanbespreking verder gaan onderzoeken. Hierna vraagt hij aan de studenten of ze het niet opmerkelijk vinden dat tussen  $3 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$ , 3 van de paden juist naar elkaar toe gaan en dicht bij elkaar blijven. Een van de studenten oppert dat het chaotische gedrag verdwijnt door demping. Onzin roept de andere, immers op  $t=4 \text{ s}$  lopen de verschillende paden weer uiteen. Omdat de studenten nu wat in de war dreigen te raken, neemt de assistent begeleidingsniveau B1 aan. Op  $t=0 \text{ s}$  lopen de paden dicht bij elkaar en is er geen sprake van chaos. Op  $t=1.6$  bevinden de paden zich in een punt een fase-ruimte waar de paden divergeren; dit wordt een repellor genoemd ( $\lambda > 0$ ). Bij  $t=3 \text{ s}$  treedt het tegenovergestelde gedrag op. De paden lopen hier juist naar elkaar toe ( $\lambda < 0$ ) en zo een punt heet daarom een attractor. Vervolgens schakelt de assistent weer over naar niveau B2/B3. Hoe bepalen jullie eigenlijk de Lyapunov exponent? De studenten laten de assistent grafiek 2 zien en leggen uit hoe ze hiermee  $\lambda$  bepalen. Belangrijk is dat deze grafiek begint op het tijdstip  $t=1.6 \text{ s}$  uit de linkergrafiek. [...Er is een discussie over grafiek 2 waar ook het grillige gedrag op  $t > 0.5 \text{ s}$  ter sprake komt...]. De assistent vraagt de studenten wat het doel is van hun experiment. Ze willen  $\lambda$  meten als functie van de beginhoek. Een van de studenten merkt

*op dat er iets gek is aan de hand is met hun methode. Is de Lyapunov exponent die zij op deze manier meten wel een eigenschap van de beginhoek van het systeem, of meer van de toestand van het systeem waarin het zich in het geval van grafiek 1  $t=1.6$  s in bevindt?*

De assistent spoort met kritische vragen de studenten aan om goed na te denken waar ze eigenlijk mee bezig zijn. Uiteindelijk bereikt de assistent dat de studenten elkaar en zichzelf kritische vragen gaan stellen. Een dergelijke houding is van belang bij het doen van wetenschappelijk onderzoek en het is daarom essentieel dat studenten deze houding bij het practicum aangeleerd krijgen. In het bovenstaande verhaal komt ook een interessante dynamiek tussen de twee studenten naar voren. Het is leuk als assistent om hier op in te spelen.

Het stellen van kritische vragen lijkt misschien moeilijk maar je kunt altijd terugvallen op de standaard vragen

1. Waarom doe je dit zo? (meetmethode)
2. Wat gebeurt er precies? (theorie $\leftrightarrow$ experiment)
3. Wat als? (verkennen van de fysica v.b. Wat als de demping heel groot is, is er dan nog chaos? of Wat als de Lyapunov exponenten complex is)
4. Weet je zeker dat het correct/juist is wat je aan het doen bent?

## 9. Ideeën voor onderzoek

In dit laatste hoofdstuk opperen wij een aantal ideeën voor onderzoek dat met deze opstelling gedaan kan worden ter inspiratie.

- *Wat is de invloed van wrijving?*

De niet-aangedreven dubbele slinger is strikt gezien niet chaotisch vanwege de demping in het systeem. De vraag is hoe sterk de invloed van demping is. Bij een dergelijk experiment is het denkbaar dat studenten onderzoeken hoe de typisch chaos tijdschaal  $\lambda^{-1}$  zich verhoudt met de typische dempingtijdschaal  $\lambda_D^{-1}$  (we nemen aan dat de energie in het systeem exponentieel afneemt door dissipatie met exponent  $\lambda_D^{-1}$ )

- *Over welke tijdswindow kan de Lyapunov exponent bepaald worden?*

Het systeem dempt uit waardoor alle paden uiteindelijk naar elkaar toelopen. Hier komt nog eens bij dat bij het afleiden van de Lyapunov exponent er is verondersteld dat

$$\frac{f(x' + \Delta x) - f(x')}{\Delta x} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x'} = \lambda$$

Dit is correct als het verschil in paden klein is of als de functie  $f$  lineair is in  $x$ , wat niet het geval is voor chaotische systemen.

Hoe bepaal je objectief een tijdswindow waarover het verschil tussen paden aan een exponent te fitten?

- *Welke Lyapunov exponent is maximaal, die van  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\dot{\theta}_1$  of  $\dot{\theta}_2$ ?*

Voor elke dynamische variabele is er een Lyapunov exponent. Het is interessant om te onderzoeken welke exponent maximaal is en of dit voor alle hoeken hetzelfde is.

- *Het theorema van Liouville*

Volgens het theorema van Liouville is het volume van een distributie punten in fase ruimte een constante van beweging. Dit moet van invloed zijn op de Lyapunov exponenten van de verschillende dynamische variabelen. Ofwel de som van de Lyapunov exponenten is een constante van beweging (als er geen wrijving is).

- *De standaarddeviatie methode tegenover de verschilmethode*

Een logische methode om de Lyapunov exponent te bepalen is met de verschil methode die gebaseerd is op de vergelijking

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \sim e^{\lambda t}$$

In het verleden is geopperd om de Lyapunov exponent te bepalen met behulp van de standaarddeviatie methode die gebaseerd is op

$$\sigma(\varphi(t)) \sim e^{\lambda t}$$

Een belangrijke aanname bij deze laatste methode is dat de lyapunov exponent weinig variatie vertoont over de verschillende paden waarover de standaarddeviatie bepaald wordt.

De vraag is welke methode beter is en of beide methodes dezelfde Lyapunov exponent produceren.

- Is er sprake van een kritische hoek waarbij opeens chaos optreedt?

De numerieke berekeningen in figuur 7 suggereren dat er sprake is van een kritische hoek waarbij chaos plotseling optreedt. Kan men dit experimenteel aantonen. Wat is er zo bijzonder aan deze hoek?

- Het bepalen van het spectrum van Lyapunov exponenten

Een experiment voor de meet-freaks. Hoe hangt de waarde van de maximale Lyapunov exponent af van de beginhoek.

- Wat is de reproduceerbaarheid van het experiment?

Men verricht bij een hoek een heleboel metingen van de Lyapunov exponent. Hoe zijn deze metingen verdeeld? Zijn de metingen reproduceerbaar?

- Hoe hangt de voorspelbaarheidshorizon af van de beginhoek?

Als de slinger van af een zekere beginhoek wordt laten vallen, lijkt er pas na een bepaalde tijd chaos op te treden. Hoe hangt deze tijd af van de beginhoek?

---

*Every honest researcher I know admits he's just a professional amateur. He's doing whatever he's doing for the first time. That makes him an amateur. He has sense enough to know that he's going to have a lot of trouble, so that makes him a professional.*

*Charles Franklin Kettering (1876-1958) U. S. Engineer and Inventor.*